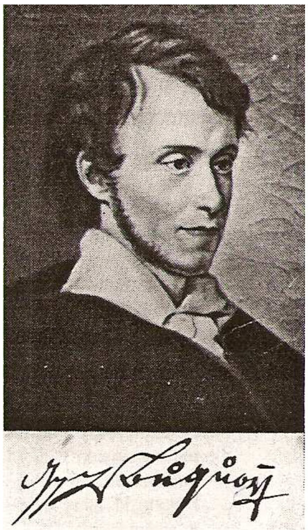
Hrabě Buquoy a jeho úlohy

Jiří Podolský

Počátkem 19. století hrabě Jiří Buquoy jako první v historii fyziky obecně formuloval a řešil problém pohybu těles s proměnnou hmotností. Jeho myšlenky však byly na skoro celá dvě staletí zapomenuty. Až v nedávné době se jim dostává zasloužené pozornosti. Smyslem tohoto příspěvku je dále přispět k širšímu povědomí o Buquoyově životě a díle, především o tom, jak pozoruhodný byl jeho příspěvek teoretické mechanice.

Životopis J. F. A. Buquoye

Hrabě Jiří František August Buquoy[1] se narodil 7. 9. 1781 v Bruselu a zemřel 19. 4. 1851 v Praze.



Pocházel ze starobylého a významného šlechtického rodu, jehož francouzské kořeny sahají do 11. století. Byl vzdáleným potomkem velitele císařských vojsk v bělohorské bitvě generála Karla Bonaventury de Longueval, graf von Buquoy (1571–1621). Ferdinand II mu za prokázané služby v roce 1620 daroval panství Nové Hrady, Rožmberk,

[1] Obvyklá česká výslovnost jména je „bukvoj“, autenticky by však měla být spíše „bukuá“. Buquoy sám se podepisoval německy jako Graf Georg von Buquoy.

Libějovice a tvrze Žumberk a Cuknštejn. Rod v Čechách zakořenil a stal se významným činitelem na české politické, ekonomické i kulturní scéně.

Jiří František přišel do Čech jako dítě se svým otcem po rozvodu rodičů. Po otcově smrti byl ve 13 letech dán do péče strýce Johanna. Dostalo se mu soukromého vzdělání v rodině, oficiální maturitu složil na gymnáziu v Praze. V letech 1799–1803 studoval na Vídeňském dvorním lyceu (tzv. Terezianu) založeném roku 1746 pro děti aristokratů. Kromě filosofie a práva ho silně zaujaly přírodní vědy a matematika. Byl mimo jiné solidně vzdělán v diferenciálním a integrálním počtu.

Jeho osud se rázem změnil 12. dubna 1803, kdy zemřel bezdětný strýc Johann. Jiří ve 22 letech zdědil kolosální rodový majetek. Po celý život se o něj výtečně staral a s velkým umem spravoval rozsáhlé jmění. Naprosté materiální nezávislosti bezprostředně využil ke svým cestám po Evropě. Během dvou let navštívil především Švýcarsko, Francii a Itálii. Po návratu do Čech si v roce 1806 vzal za ženu hraběnku Gabrielle von Rottenhan.

Kromě zájmu o vědy a umění věnoval svůj čas především správě majetku, a to nejen po stránce ekonomické, ale i technické. Roku 1810 například sestrojil funkční parní stroj a uplatnil ho v praxi. Měl vlastní laboratoř. Osobně se věnoval rozvoji novohradských skláren: v roce 1817 přišel s unikátní technologií výroby *hyalitu* – černého neprůhledného skla. Tento objev je však dnes již zapomenut.

Hrabě Jiří Buquoy se aktivně zabýval přírodními vědami. Byl v kontaktu s předními evropskými učenci té doby, jako Goethe, Humboldt, Gauss, Gerstner, Bolzano a další. Jak dále podrobně popíšeme, v roce 1815 podnikl cestu do Paříže. Tam o svých fyzikálních objevech a myšlenkách hovořil s Laplacem, Ampèrem, Cauchym, Fourierem a jinými. Byl členem mnoha učených společností včetně Královské české společnosti nauk. V letech 1820–1835 byl ve vedení Národního muzea v Praze. Je znám také tím, že r. 1838 založil první přírodní rezervace v Čechách: Žofínský prales a Hojná Voda v Novohradských horách.

Buquoyova badatelská a publikační aktivita byla velice rozsáhlá: sepsal více než 150 prací a úvah, především z filosofie, politiky, ekonomie, přírodních věd, věnoval se ale i poezii. Většinu jeho spisů tvoří knihy, brožurky a četné příspěvky do časopisu *Isis*. Jeho fyzikální práce rozhodně nebyly bezvýznamné: 9 příspěvků například publikoval v prestižním *Annalen der Physik*.

Pro dokreslení Buquoyovy osobnosti ještě závěrem uveďme, že pro své názory i aktivity byl mezi pražskou inteligencí značně populární (podrobně to popisuje Sabina ve svých *Vzpomínkách*). Byl stoupencem české národní emancipace a aktivně ze zúčastnil událostí roku 1848. V dubnu byl zvolen do Národního výboru a v některých kruzích se dokonce uvažovalo o tom, že by měl nastoupit na český trůn. Údajně poskytl velké množství peněz českým národním organizacím, zejména studentským. Za to byl rakouskými úřady dokonce krátce uvězněn a jeho dům prohledán.

Buquoyův příspěvek mechanice

Zde se budeme zabývat jen těmi Buquoyovými myšlenkami, které se týkají principů mechaniky. Jak jsme již předeslali, Buquoy jako první v historii fyziky formuloval a řešil *problém pohybu těles s proměnnou hmotností.* Do té doby se řešily jen idealizované úlohy, v nichž vystupovaly hmotné body, které mají ze své podstaty konstantní hmotnost. Tématice věnoval tři rozsáhlé publikace:

- G. von Buquoy: *Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*, Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1812.
- G. von Buquoy: *Weitere Entwickelung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*, Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1814.
- G. von Buquoy, *Exposition d'un nouveau principe général de dynamique, dont le principe des vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier*, Paris: V. Courcier, 1815.

Jejich hlavní obsah nyní ve stručnosti popíšeme.

1812: Formulace pohybových rovnic

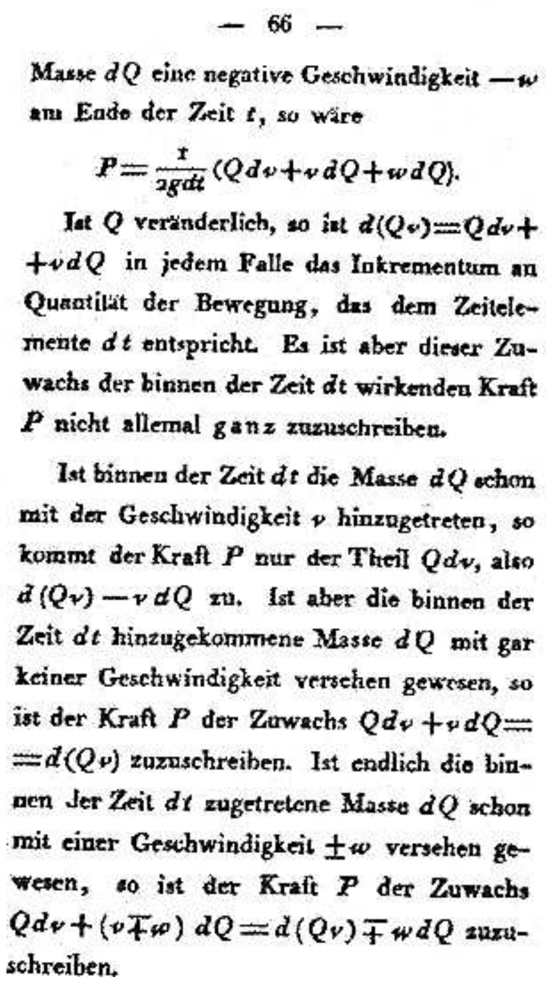
V knize *Stanovení analytického zákona virtuálních rychlostí pro mechaniku i statiku* (má celkem 72 stran) Buquoy jako první v dějinách explicitně formuluje správnou pohybovou rovnici platnou i pro případ, kdy se hmotnost objektu mění. V § 36 na str. 66 rovnici uvádí ve tvaru

$$P = \frac{1}{2g\,\mathrm{d}t}(Q\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}Q \pm w\,\mathrm{d}Q),$$

přičemž použité symboly mají následující význam:

P … působící síla
Q … hmota tělesa (je úměrná hmotnosti)
t … čas
v … rychlost tělesa
w … absolutní rychlost, s níž se kus hmoty $\mathrm{d}Q$ připojuje k pohybu

Faksimile zmíněné stránky je na následujícím obrázku:



— 66 —

Masse dQ eine negative Geschwindigkeit $-w$ am Ende der Zeit t, so wäre

$$P = \frac{1}{2g\,dt}(Q\,dv + v\,dQ + w\,dQ).$$

Ist Q veränderlich, so ist $d(Qv) = Q\,dv + + v\,dQ$ in jedem Falle das Inkrementum an Quantität der Bewegung, das dem Zeitelemente dt entspricht. Es ist aber dieser Zuwachs der binnen der Zeit dt wirkenden Kraft P nicht allemal ganz zuzuschreiben.

Ist binnen der Zeit dt die Masse dQ schon mit der Geschwindigkeit v hinzugetreten, so kommt der Kraft P nur der Theil $Q\,dv$, also $d(Qv) - v\,dQ$ zu. Ist aber die binnen der Zeit dt hinzugekommene Masse dQ mit gar keiner Geschwindigkeit versehen gewesen, so ist der Kraft P der Zuwachs $Q\,dv + v\,dQ = = d(Qv)$ zuzuschreiben. Ist endlich die binnen der Zeit dt zugetretene Masse dQ schon mit einer Geschwindigkeit $\pm w$ versehen gewesen, so ist der Kraft P der Zuwachs $Q\,dv + (v \mp w)\,dQ = d(Qv) \mp w\,dQ$ zuzuschreiben.

Pomocí dnešních symbolů můžeme Buqoyovu pohybovou rovnici snadno přepsat jako

$$m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + (v \pm w) \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = F \, .$$

V případě, že je hmotnost m tělesa konstantní, platí $\mathrm{d}m = 0$, a protože časová derivace rychlosti je zrychlení a, dostáváme $ma = F$. To je všeobecně známá Newtonova rovnice, kterou obvykle učíme studenty.

V *obecném* případě však Newtonova rovnice nezní „hmotnost krát zrychlení je síla“, ale „časová derivace hybnosti je síla“, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = F$, kde hybnost p je součin hmotnosti m a rychlosti v. Buquoy tedy zcela správně zobecňuje dosavadní výklad Newtonova pohybového zákona. Povšimněme si, že dokonce připouští možnost obou znamének $\pm w$. To umožňuje studovat nejen případy, kdy se k tělesu hmota přidává, ale i situace, kdy naopak těleso hmotu ztrácí. To je třeba případ rakety, která se pohybuje vpřed jen díky tomu, že tryskou vystřeluje plyn směrem dozadu.

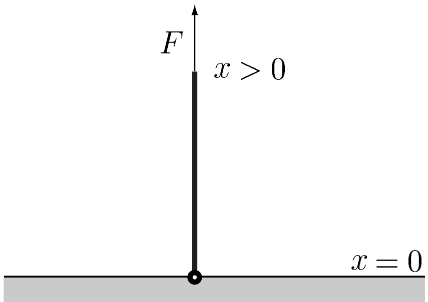
1814: Buquoyovy úlohy

V navazující rozsáhlé publikaci *Další rozvinutí a použití zákona virtuálních rychlostí pro mechaniku i statiku*, jež má celkem 164 stran, Buquoy formuluje a také řeší mnoho hezkých konkrétních úloh, při nichž se mění hmotnost objektu. Jsou mezi nimi například:

- zvedání lana (§ 20)
- válec na svahu nabalující sníh (§ 34)
- shrabování půdy pluhem (§ 49)
- otáčení zabláceného kola kočáru (§ 51)
- čerpadla, dopravníky atd.

V tomto příspěvku popíšeme pouze **první z Buquoyových úloh**. Je uvedena v § 20 na str. 34–36 zmíněného díla a zní takto:

> *Na podložce leží smotané dokonale ohebné vlákno. Určete pohyb, když na jeho konec působí svisle vzhůru konstantní síla.* (viz obr.)



V praxi by se mohlo jednat například o pohyb lehkého balónu, ze kterého visí až na zem lano, jež se při svislém stoupání balónu odmotává, zatímco při klesání dopadá a zůstává stát.

Tuto úlohu lze vyřešit, pokud provedeme některá zjednodušení, především že vlákno se při pohybu vzhůru odmotává bez tření, zatímco při pohybu dolů se již dopadlá část vlákna nepohybuje. Také budeme předpokládat, že gravitačnímu pole g je homogenní a že vlákno je jednorozměrné a má konstantní lineární hustotu η.

V tomto případě Newtonova–Buquoyova rovnice zní $\dot{p} = F - mg$, neboť tíha odmotaného konce vlákna je mg. Označíme-li $x > 0$ polohu konce vlákna nad podložkou, je proměnná hmotnost odmotaného vlákna dána $m = \eta\, x$, zatímco hybnost je $p = m\,\dot{x}$, takže

$$m\,\ddot{x} + \dot{m}\,\dot{x} = F - \eta\, xg\,.$$

Při dalším řešení je třeba dát pozor na *asymetrii úlohy*:

Při pohybu vzhůru dosazením za $m = \eta\, x$ dostaneme

$$\ddot{x} = \frac{F}{\eta x} - g - \frac{\dot{x}^2}{x}\,.$$

Při pohybu dolů však zcela *chybí* člen $\dot{m}\,\dot{x}$, protože je kompenzován interakcí s podložkou (předpokládáme dokonale nepružný dopad), takže

$$\ddot{x} = \frac{F}{\eta x} - g\,.$$

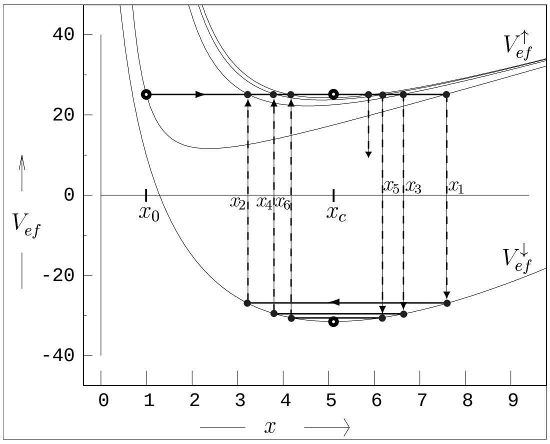
Kompletní pohyb získáme správným navázáním řešení první rovnice (pro $\dot{x} > 0$) a druhé rovnice (pro $\dot{x} < 0$) v bodech obratu $\dot{x} = 0$, které jsou *společné*.

Snadno lze najít první integrály obou pohybových rovnic,

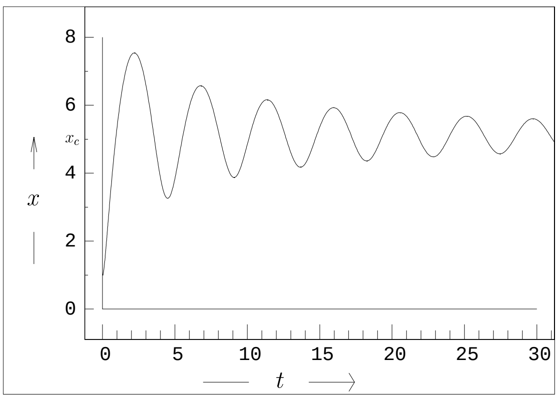
$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{ef}^{\uparrow}(x) = \frac{F}{2\eta} \;, \qquad \text{kde} \quad V_{ef}^{\uparrow}(x) \equiv \frac{g}{3}\,x - \frac{C}{x^2} \;,$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{ef}^{\downarrow}(x) = V_{ef}^{\downarrow}(x_1) \;, \quad \text{kde} \quad V_{ef}^{\downarrow}(x) = g\,x - \frac{F}{\eta}\ln x \;,$$

a pohyb analyzovat metodou efektivních potenciálů $V_{ef}^{\uparrow}(x)$ a $V_{ef}^{\downarrow}(x)$. Dostaneme posloupnost horních a dolních bodů obratu $x_1, x_2, x_3, \ldots$, které se blíží stacionární hodnotě $x_c = F/\eta g$. Průběhy potenciálů a posloupnost bodů obratu jsou znázorněny na následujícím obrázku:



Přehlednější je provést přímou numerickou integraci pohybových rovnic. Opravdu dostaneme řešení, které má charakter *tlumených oscilací*, jak je znázorněno na následujícím obrázku:



Více podrobností o vlastnostech řešení této zajímavé úlohy lze nalézt v publikacích [1]–[4].

Jak je vidět na kopii příslušné stránky jeho díla, Buquoy zformuloval správné pohybové rovnice své první úlohy pro pohyb vlákna směrem nahoru a našel dokonce i jejich první integrál. Je však uveden v chybném tvaru. Není přitom jasné, zda jde pouze o tiskovou chybu anebo Buquoyův matematický omyl.

— 35 —

4 zu lösen sey. Wir nennen s die am Ende der Zeit t aufgezogene Länge, γ das Gewicht der Längeneinheit unserer Schnur; und nehmen an, es sey zu Anfange der Zeit t schon die Länge l aufgezogen, so dass für $t = o$, $s = l$ sey. Es ist demnach

$$p - \gamma s = \frac{1}{2g\,dt}(\gamma s\,dv + v\,\gamma\,d\,s), \text{ oder}$$

$$p\,ds - \gamma.\,s.\,ds = \frac{\gamma}{2g}(s v\,dv + v^2 ds).$$

Hieraus folgt

$$sds + \left(-\frac{p}{\gamma} + o.v + \frac{1}{2g}.v^2\right)ds = sdv\left(o - \frac{1}{2g}.v\right)$$

Nach Eulers Methode wird diese Gleichung so integrirt.

Setze $u = \dfrac{s.\ v}{2gs - \frac{2gp}{\gamma}}$, so gibt obige Gleichung folgende

$$4g^2\int\frac{dv}{-\frac{2gp}{\gamma}.\,v + v^3} = \int\frac{du}{-\frac{p}{2g\gamma}.\,u + u^3};$$

wendet man hier die Lehre der Partialbrüche

1815: Buquoyova cesta do Paříže

Koncem léta roku 1815 podnikl hrabě Buquoy cestu do Paříže. Cílem bylo prezentovat jeho myšlenky a výsledky, týkající se pohybů těles s proměnnou hmotností, elitě tehdejší vědy. Pobyt, který se uskutečnil mezi 17. srpnem a 26. zářím, lze dobře rekonstruovat, protože Buquoy ho podrobně popsal ve svém deníku [5]. Nejdůležitější události lze chronologicky shrnout takto:

21.8. Je uveden do fyzikálně-matematické třídy *Pařížské akademie věd*. Následně dává vyhotovit a vytisknout francouzský překlad spisku, ve kterém shrnuje všechny podstatné informace o svém nové principu virtuálních rychlostí. V něm se pokusil předložit jednotný princip dynamiky i statiky, přičemž princip zahrnuje i objekty s proměnnou hmotností.

26.8. Buquoy krátce navštívil Pierra Simona Laplace a hovořil s ním.

28.8. Prezentoval své myšlenky na zasedání Akademie. Přítomni byli například Laplace, Poisson, Delambre, Ampère, Cauchy, Fourier, Arago a další přední osobnosti evropské vědy té doby. Po prezentaci následovala osobní diskuse. Buquoy si do svého deníku poznamenal, že Ampère a Fourier jeho myšlenky ocenili, zatímco Laplace a Poisson je nepřijali.

4.9. Buquoy se zúčastnil dalšího zasedání. Během něj mimo jiné předal Girardovi práci od Gerstnera, kterou přivezl z Prahy.

8.9. Setkal se s Alexanderem von Humboldtem. Ten mu doporučil osobně navštívit Laplace v jeho rezidenci za Paříží, a tam mu v klidu objasnit své názory.

10.9. Buquoy tuto dobrou radu uposlechl a Laplace navštívil. Během dlouhé procházky podrobně zodpověděl všechny otázky, které mu Laplace ohledně jeho rovnic a principů mechaniky položil. Průběh rozhovoru je pečlivě zaznamenán v Buquoyově deníku.

Buquoy například uvádí:
„Větší obecnost mého principu oproti principu Lagrangeovu spočívá v tom, že připouští i proměnné hmotnosti.“

Laplace s tím souhlasí:
„V takovém případě musí být Váš princip opravdu obecnější.“

Buquoy objasňuje svou rovnici pro změnu hybnosti ve tvaru $m\,\mathrm{d}v + (v - w)\,\mathrm{d}m = F\,\mathrm{d}t$:
„Tento přístup se ukázal být pro Laplace natolik nový, že jsem mu ho musel několikrát po sobě pomalu a srozumitelně opakovat, nicméně nakonec si tuto myšlenku osvojil, plně ji pochopil a začal projevovat o celou věc značný zájem.“

Buquoy pak své myšlenky ilustroval na konkrétních příkladech. Laplace poznamenal, že by to mohlo nalézt uplatnění v nebeské mechanice pro tělesa, která vysílají nebo přijímají světlo (např. pro Zemi).

další dny Buquoy uskutečnil několik dalších setkání s Laplacem. Vše nasvědčuje tomu, že vzbudil Laplaceův zájem, neboť přímo píše:
„Laplace již plně pochopil podstatu mých idejí.“
Pro zajímavost uveďme, že na závěrečném setkání Laplace mimo jiné předal Buquoyovi dopis pro Gausse.

Další osud: zapomnění a znovuobjevení

Je překvapivé, že i přes zmíněnou cestu do Paříže a osobní kontakt s předními fyziky té doby upadly Buquoyovy myšlenky v úplné zapomnění. Jedinou zaznamenou publikovanou reakcí je krátký kritický článek Poissona z roku 1819 [6]. Poisson v něm přitom kritizoval obecně „filozofické“ aspekty Buquoyova principu, nikoli jeho (správnou) formulaci pohybového zákona pro tělesa z proměnnou hmotností.

Buquoyova pohybová rovnice byla zapomenuta a mechanické úlohy s proměnnou hmotností byly poté znova nezávisle objevovány a řešeny dalšími: v roce 1813 Moorem [7] a kolem roku 1850 Taitem a Steelem v Anglii [8], koncem 19. století Meščerskim v Rusku [9], nebo Levi-Civitou v Itálii ve 30. letech dvacátého století [10].

Buquoyovo průkopnické dílo bylo objeveno a doceněno až zcela nedávno zásluhou ruského historika přírodních věd Michajlova. V několika důkladných publikacích [11], [12] a [13] nejen pečlivě analyzoval a popsal Buquoyovy myšlenky, rovnice a úlohy, ale především je zařadil do historického kontextu. Explicitně a po právu označil Buquoye za prvního v dějinách fyziky, kdo formuloval a řešil problém pohybu těles s proměnnou hmotností. Především zásluhou Michajlova vyšlo jméno hraběte Buquoye coby nadaného a schopného přírodovědce ze zapomnění času a postupně se dostává do povědomí historiků vědy a fyziků. Jeho úlohy s proměnnou hmotností se začínají objevovat v učebnicích, například [1], [2]. Buquoyovo prvnenství již oficiálně uznal i americký úřad pro letectví a kosmonautiku NASA: v nedávné zprávě shrnující pětiletý výzkumný projekt zaměřený na studium dynamiky systémů s proměnnou hmotností [14] se v úvodní kapitole doslova uvádí:

> *Český vědec a vynálezce George von Buquoy (1781–1851) byl první, kdo se obecně zabýval problémem dynamiky systémů s proměnnou hmotností. V roce 1812 získal „pohybovou rovnici" platnou pro takové systémy a následně pomocí svého vzorce řešil mnoho konkrétních příkladů. Práci von Buquoye lze označit za zrod dynamické teorie systémů s proměnnou hmotností.*

Můžeme tedy uzavřít, že hrabě Jiří Buquoy byl nesporně význačná osobnost. Jeho originální přínos fyzice však nebyl téměř 200 let doceněn. Až v poslední době se daří tuto historickou nespravedlnost napravit. V zemi, kde Buquoy žil a tvořil, je to přímo naše morální povinnost.

Poděkování a pár osobních poznámek

O Buquoyově úloze jsem se poprvé dozvěděl v roce 1994 ze skript [2] kolegy doc. Slavíka, kde je na str. 22 úloha zformulována a vyřešena pro případ stoupajícího vlákna a nulové hodnoty integrační konstanty C. Příklad se mi moc zalíbil, a proto jsem ho zařadil mezi standardní úlohy, které počítáme na cvičeních z Teoretické mechaniky ve 2. ročníku studia fyziky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. V interakci se studenty jsem si postupně začínal uvědomovat celou hloubku, krásu a složitost Buquoyovy první úlohy, především její asymetrii při pohybu nahoru a dolů. V říjnu 1997 jsme ve velké posluchárně dokonce provedli několik experimentů s balónkem naplněným heliem, ze kterého až na zem visel odmotávající se provázek. Po vypnutí klimatizace, která proudem vzduchu rušila jemný pohyb, se nám podařilo pozorovat a proměřit několik oscilací kolem rovnovážné polohy.

Po několika dalších ročnících jsem však úlohu přestal cvičit, protože rozsah problému přesáhl únosný čas, který je možno jednomu příkladu během cvičení věnovat. Úloha ale již začala žít svým vlastním životem. Někteří zvídaví studenti si o Buquoyově úloze povídali napříč ročníky. Následně vyhledali doc. Šímu, který na MFF UK přednáší mechaniku v 1. ročníku, aby u něj hledali radu a poučení, jak problém správně vyřešit. Kolegu Šímu úloha také okouzlila a dospěl k závěru, že tento krásný příklad by si zasloužil publikovat v některém pedagogickém časopise. Prostřednictvím doc. Dvořáka jsem se o jeho úmyslu dozvěděl, čímž začala naše spolupráce nad Buquoyovou úlohou. Sehnali jsme původní zdroje — neocenitelná při tom byla pomoc kolegy Slavíka — a úlohu jsme pečlivě promysleli. Výsledkem byla v roce 2005 společná publikace [3] v evropském pedagogickém časopise *European Journal of Physics* a o rok později její česká verze [4] v *Pokrocích*.

Všem výše zmíněným velice děkuji.

Reference

[1] J. G. Panovko, *Mechanika deformirujemogo tverdogo tela: sovremennyje koncepcii, ošibki i paradoksy*, Nauka, Moskva, 1985, pp. 173–178.

[2] J. Slavík, *Teoretická mechanika*, Západočeská univerzita, Plzeň, 1994, pp. 22–23.

[3] V. Šíma, J. Podolský: *Buquoy's problem*, Eur. J. Phys. **26** (2005) 1037–1045.

[4] V. Šíma, J. Podolský: *Buquoyova úloha*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **51** (2006) 177–186.

[5] E. Hirsch, *Graf Georg Buquoy: ein vergessener Goetheanist* Österreichische Nationalbibliothek, Wien, 1975, pp. 19–34.

[6] S. D. Poisson, *Sur le mouvement d'un système de corps, en supposant les masses variables*, Bull. sci. Soc. philomat. Paris, avril (1819) 60–62.

[7] W. Moore, *A Treatise on the Motion of Rockets*, London, 1813.

[8] P. G. Tait, W. L. Steele, *A Treatise on Dynamics of a Particle*, Macmillan, London, 1856.

[9] I. V. Meščerskij, *Dinamika točki peremennoj massy*, St Petersburg, Tipografija Akademii nauk, 1897.

[10] T. Levi-Civita, *Ancora sul moto di un corpo di massa variable*, Rend. Accad. Naz. Lincei **11** (1930) 626–632.

[11] G. K. Michajlov, *K istorii dinamiki sistem peremennogo sostava i teorii reaktivnogo dvizhenia (do načala vtoroj mirovoj vojny)*, Prepr. Instituta probl. mechaniki AN SSSR, **49** (1974).

[12] G. K. Michajlov, *K istorii dinamiki sistem peremennogo sostava*, Mechanika tverdogo tela, Izv. AN SSSR, **5** (1975) pp. 41–51.

[13] G. K. Michajlov, *Georg Bukua i načala dinamiki sistem s peremennymi massami*, In: Issledovanija po istorii fiziki i mechaniki, Nauka, Moskva, 1986, pp. 191–238.

[14] F. O. Eke, *Dynamics of Variable Mass Systems*, NASA research grant no. NAG-2-4003, final technical report, 1998.