

Zadání příkladů pro cvičení z předmětu Programování pro fyziky

Úloha č. 10 — 19. prosince 2020

Uvažujte čtyřhvězdu složenou ze čtyř hvězd s hmotností Slunce ($M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 1M_\odot$), která má v čase $t = 0$ následující polohy a rychlosti všech čtyř hvězd

$$\begin{array}{llll} x_1 = -1.000000000000 & y_1 = -0.577384749851298 & \dot{x}_1 = -0.074759317531738 & \dot{y}_1 = 0.1998824206274314, \\ x_2 = -0.37244812608517 & y_2 = -0.219555937346995 & \dot{x}_2 = 5.43375535674564 & \dot{y}_2 = -9.414681710318698, \\ x_3 = -x_2 & y_3 = -y_2 & \dot{x}_3 = -\dot{x}_2 & \dot{y}_3 = -\dot{y}_2, \\ x_4 = -x_1 & y_4 = -y_1 & \dot{x}_4 = -\dot{x}_1 & \dot{y}_4 = -\dot{y}_1. \end{array}$$

Polohy jsou v jednotkách AU, rychlosti pak AU/rok. Napište program, který numericky řeší Newtonovy pohybové rovnice pro gravitační působení hvězd. Není rozumné přepočítávat rozměry a rychlosti do SI. Místo toho pracujte v jednotkách AU, rok a hmotnost slunce M_\odot a použijte gravitační konstantu s hodnotou

$$G = 4\pi^2 \left[\frac{\text{AU}^3}{\text{rok}^2 M_\odot} \right].$$

Doporučuje se použít jako výchozí bod kód z webových stránek cvičení v Pascalu nebo C řešící problém jednoho tělesa (<http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka>). Po zkušenostech s minulých let zdůrazňuji, že problém představuje jednu soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \\ GM_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + GM_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + GM_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_1|^3} \\ GM_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + GM_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} + GM_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_2|^3} \\ GM_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} + GM_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} + GM_4 \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_4 - \vec{r}_3|^3} \\ GM_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|^3} + GM_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_4}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|^3} + GM_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_4}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|^3} \end{pmatrix}$$

a pokud používáte cokoli lepšího než Eulerovu metodu, je třeba tuto soustavu řešit jako jeden celek. Jako kontrolu je dobré sledovat, zda se zachovává celková energie systému

$$E = \frac{1}{2}M_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}M_2|\vec{v}_2|^2 + \frac{1}{2}M_3|\vec{v}_3|^2 + \frac{1}{2}M_4|\vec{v}_4|^2 - \frac{GM_1M_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{GM_1M_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} - \frac{GM_1M_4}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_4|} - \frac{GM_2M_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} - \frac{GM_2M_4}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_4|} - \frac{GM_3M_4}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_4|}.$$

Zadání

Program nechtě vypíše pro $t = 0..10$ tabulku hodnot $t, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, E$ dostatečně hustou, aby bylo možno hladce vykreslit trajektorie hvězd v `gnuplotu` příkazy

```
set size ratio -1
set style data lines
plot 'data.txt' using 2:3, '' using 4:5, '' using 6:7, '' using 8:9
```

Samozřejmě, výsledky závisí na použité metodě a volbě časového kroku. Pro finální volbu časového kroku použijte jednoduché kritérium a to, že jeho zmenšením na třetinu se obrázek viditelně nezmění.

Váš program (tedy zdrojový kód v Pascalu, C, atp.) a soubor s obrázkem trajektorie hvězd (který vytvoříte podobně jako jiných úlohách příkazy `set term pdf; set output "cvic10.pdf"; replot; unset term`) odevzdejte prostřednictvím příslušné webové stránky.

Odkazy

Animaci můžete shlédnout na <https://vanderbei.princeton.edu/WebGL/New.html>