Zákony zachování

- k čemu jsou
  - říkají, které veličiny se během pohybu, vývoje systému, nemění
  - též užitečné při vyšetřování integrability a linearizace
  - při vývoji stabilních numerických metod
  - platí pro libovolná počáteční data
  - jsou nezávislé na souřadnicích, neboť transformace souřadnic převádí ZZ na ZZ

- lokální zákon zachování
  - uvažujme systém $R^\sigma[u] = R^\sigma(x, u, \partial u \dots \partial^k u) = 0$, $\sigma = 1, \dots, N$

    N PDrovnic pro m závislých proměnných $u = (u^1(x), \dots u^m(x))$ jakožto fcí nezávislých proměnných $x = (x^1, \dots x^n)$

  pak úplnou divergenci $\quad \mathrm{Div}\, \Phi = D_i \Phi^i[u] = D_1 \Phi^1[u] + \dots + D_n \Phi^n[u] = 0$

  splněnou pro řešení $R^\sigma = 0$, nazveme LZZ, kde

  $$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ji}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots \qquad \text{je úplná derivace}$$

  a $\Phi^i[u] = \Phi^i(x, u, \partial u, \dots \partial^r u)$, $i = 1, \dots, n$ se nazývají toky (a hustoty) ZZ a nejvyšší derivace r je pak řád ZZ.

  - pokud $x^n = t$ je čas, pak obvykle píšeme

  $$\underset{\text{hustota}}{D_t\, \rho[u]} + \mathrm{div}\, \underset{\text{prostorové toky}}{\Phi[u]} = 0, \quad \text{kde} \quad \mathrm{div}\, \Phi[u] = D_1 \Phi^1[u] + \dots + D_{n-1} \Phi^{n-1}[u] \ \text{je prostorová divergence}$$

  $$\Rightarrow D_t \underbrace{\left(\int_\Omega \rho[u]\, d^{n-1}x \right)}_{\text{zachovávající se „něco"}} = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, \phi[u])\, d^{n-1}x = \oint_{\partial\Omega} (\phi[u] \cdot \vec{n})\, d^{n-2}x = 0$$

  pokud $\phi^i[u]$ vymizí na $\partial\Omega$

Př. plyn v $\mathbb{R}^3$, v = rychlost, p = tlak, ρ = hustota

Eulerovy rovnice pro adiabatické procesy v plynu

$$D_t \rho + D_j(\rho v^j) = 0 \quad (*) \ \text{(ZZ hmoty)}$$

$$\rho(D_t + v^j D_j) v^i + D_i p = 0 \quad (**)$$

$$\rho(D_t + v^j D_j) p + \gamma \rho p D_j v^j = 0 \quad (***) \quad \gamma \text{ je adiabatický exponent}$$

další ZZ: hybnost $\quad v^i(*) + (**) = D_t(\rho v^i) + D_j(\rho v^i v^j + p\delta^{ij}) = 0$, $i = 1, 2, 3$

$$\text{energie} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{(v^i)^2}{2} (*) + \rho v^i (**) + \frac{1}{\rho(\gamma - 1)} (***) \right] =$$

$$= D_t(E) + D_j [v^j \underbrace{(E + p)}_{\text{tok energie}}] = 0 \qquad \text{kde } \underbrace{E = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1}}_{\text{hustota energie}}$$

$$\Rightarrow D_t \int_\Omega E\, d^3x = -\int_{\partial\Omega} (E + p)(\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS$$

Př. Kortewegova-de Vriesova rovnice (~~mělké~~ dlouhé povrchové vlny na mělké vodě)

(*) $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$

ZZ „hustoty"
$\hookrightarrow D_t(u) + D_x\left(\frac{1}{2}u^2 + u_{xx}\right) = 0$ $\qquad 1\cdot(*)$

hybnosti
$D_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) + D_x\left(\frac{1}{3}u^3 + u u_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0$ $\qquad u\cdot(*)$

energie
$D_t\left(\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) + D_x\left(\frac{1}{8}u^4 - u u_x^2 + \frac{1}{2}(u^2 u_{xx} + u_{xx}^2) - u_x u_{xxx}\right) = 0$

ale ∞ mnoho dalších, vyšší polynomy v u a u_x

- <u>ekvivalentní ZZ</u>

<u>Def:</u> LZZ pro určitý systém PDR $R^\sigma[u]=0$ nazveme <u>triviální</u>,

pokud $\Phi^i[u] = M^i[u] + H^i[u]$

kde $M^i[u] = 0$ pro $\forall u = f(x)$ řešení $R^\sigma[u]=0$ (prvního druhu)

a $H^i[u]$ splňuje $D_i H^i[u] \equiv 0$ pro $\forall u$ (druhého druhu)

<u>Př.</u> $v_x = u$, $v_t = K(u)\,u_x$

pak
$D_t[u(u - v_x)] + D_x[z(v_t - K(u)\,u_x)] = 0$ prvního druhu

$D_t(u_{xx}) - D_x(u_{tx}) = 0$ druhého druhu

Př. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ pro lib. fci $\vec{F}(x)$ v $\mathbb{R}^3$ - triviální ZZ druhého druhu

<u>Def:</u> Dva ZZ $D_i\Phi^i[u]=0$ a $D_i\Psi^i[u]=0$ jsou <u>ekvivalentní</u>,

pokud $D_i(\Phi^i[u] - \Psi^i[u]) = 0$ je triviální ZZ.

Třída ekvivalence ZZ je tvořena všemi ZZ ekvivalentními určitému netriviálnímu ZZ.

<u>Def:</u> ZZ $\{D_i\Phi^i_{(j)}[u]=0\}_{j=1}^{\ell}$ jsou <u>lineárně závislé</u>, pokud $\exists\ \{a^{(j)}\}_{j=1}^{\ell}$ nenulové

takové, že $D_i(a^{(j)}\Phi^i_{(j)}[u]) = 0$ je triviální ZZ.

- hledáme netriviální, lineárně nezávislé ZZ - přímá konstrukce Bluman et al. (2009)

- <u>charakteristický tvar ZZ</u> a charakteristika (multiplikátory, integrační faktor)

- lze ukázat, že má-li být $\operatorname{Div}\Phi = 0$ pro řešení $u=f(x)$ PDR $R^\sigma[u]=0$, pak

$$\operatorname{Div}\Phi = \underbrace{\sum Q_\mu^J D_J R^\mu}_{\text{multiindex}} \overset{\text{„per partes"}}{\Longrightarrow} \boxed{\operatorname{Div}\Phi = \operatorname{Div}\Psi + \sum_{\mu=1}^{N} Q_\mu R^\mu}$$

$D_J R^\mu = 0$ pro $R^\mu = 0$ $\qquad$ kde $Q_\mu = \sum_J (-D)_J\, Q_\mu^J$

kde Ψ dává triviální ZZ (prvního druhu)

Zákony zachování – pokračování

a tedy ZZ $\mathrm{Div}\,\Phi$ má ekvivalentní ZZ $\mathrm{Div}\,\Phi' = 0 = \mathrm{Div}(\phi - \psi) = Q_\mu R^\mu$ — charakteristický tvar

a $\vec{Q} = (Q_1 \dots Q_N)$ je tzv. charakteristika ZZ
(též multiplikátory, pro ODR integr. faktory)

- ovšem Q není určena jednoznačně (kromě $N=1$), avšak je-li pro Q a Q'
$Q \cdot R = Q' R$, pak (lze ukázat, pokud je R nedegenerované (max. hodnosti), pak) $Q - Q' = 0$ pro $u = f(x)$ řešení $R^\nu = 0$

$\Rightarrow$ 2 charakteristiky Q a Q' jsou ekvivalentní, pokud se liší triviální charakteristika

tj. $Q - Q' = \tilde{Q} \equiv 0$ pro $u = f(x)$

- lze ukázat, že pro „rozumné" PDR jsou 2 ZZ ekvivalentní, pokud jsou ekvivalentní jejich charakteristiky

---

Symetrie a jejich charakteristický tvar

- měli jsme obecné bodové symetrie generované

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\substack{J \\ 1 \le \# J \le k}} \eta^\alpha_J (x, u, \partial u \dots) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$

kde
$$\eta^\alpha_{\underbrace{i_1 \dots i_p}_{J}} = D_{i_p} \eta^\alpha_{i_1 \dots i_{p-1}} - \sum_{j=1}^{n} (D_{i_p} \xi^j) u^\alpha_{i_1 \dots i_{p-1} j}$$

což lze přepsat jako (indukcí, využití $D_{i_1}(\xi^j u^\alpha_j) = (D_{i_1} \xi^j) u^\alpha_j + \xi^j u^\alpha_{i_1 j}$ apod.)

$$\eta^\alpha_J = D_J \underbrace{\left(\eta^\alpha - \sum_{j=1}^{n} \xi^j u^\alpha_j\right)}_{\hat{\eta}^\alpha} + \sum \xi^j u^\alpha_{J,j}$$

Výraz $\hat{\eta}^\alpha$ se nazývá
charakteristika symetrie

Pokud připustíme zobecnění, že η^α mohou záviset na derivacích, pak ~~soustavy~~ dif. rovnice inv. vůči X jsou též inv. při transf. generovaných

$$\hat{X} = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$ – charakt. tvar inf. gen. X

jehož rozšíření je $$\hat{X}^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\substack{J \\ 0 \le \# J \le k}} \hat{\eta}^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$, kde $\hat{\eta}^\alpha_J = D_J \hat{\eta}^\alpha$

Vztah mezi $\hat{X}^{(k)}$ a $X^{(k)}$:

$$X^{(k)} = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\substack{\alpha, J \\ \# J \ge 0}} \eta^\alpha_J \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} = \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{\alpha, J} \left(D_J \hat{\eta}^\alpha + \sum_j \xi^j u^\alpha_{J,j} \right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} = \hat{X}^{(k)} + \sum_j \xi^j D_j$$

$$= \hat{X}^{(k)} + \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j,\alpha} \xi^j u^\alpha_j \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{j, j_2, \alpha} \xi^j u^\alpha_{j, j_2} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{j_2}} + \dots =$$

Věta Noetherové (bodové symetrie)

Nechť jednoparam. grupa bod. transf. generovaná

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

je grupou symetrie variačního problému $\mathscr{L}[u] = \int L[u]\, d^n x$

a tedy i grupou symetrie Eulerových-Lagrangeových rovnic $E_\alpha(L) = 0$

Pak $\hat{\eta}^\alpha = \eta^\alpha - \sum_{i=1}^{n} \xi^i u_i^\alpha$ (charakteristika X) je charakteristikou zákona zachování příslušných E-L rovnic, tj. $\exists\, \Phi[u] = (\Phi^1, \dots \Phi^n)$ takové, že

$$\operatorname{Div} \Phi = \hat{\eta} \cdot E(L) = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \cdot E_\alpha(L) = 0$$

přičemž pro $L = L(x, u, \partial u)$ jsou toky Φ^i dány vztahy

$$\Phi^i = - \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - L\xi^i = \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \xi^j u_j^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - L\xi^i$$

<u>Důkaz:</u> Dosazení do inf. kritéria variační symetrie

$$X^{(2)} L + L \operatorname{Div} \xi = 0$$

za $X^{(2)} = \hat{X}^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} \xi^j D_j$

dostaneme $\hat{X}^{(2)} L + \sum_{j=1}^{n} \left[\xi^j D_j L + L D_j \xi^j\right] = \hat{X}^{(2)} L + \operatorname{Div}(L\xi)$ $\qquad (*)$

a člen $\hat{X}^{(2)} L$ upravujeme à la per partes

$$\hat{X}^{(2)} L = \sum_{\alpha, J} (D_J \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} \Bigg\{ \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \left[D_i\left(\hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}\right) - \hat{\eta}^\alpha D_i \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1, i_2} \left[D_{i_2}\left((D_{i_1} \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \right) - D_{i_1}\left(\hat{\eta}^\alpha D_{i_2} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \right) + \hat{\eta}^\alpha D_{i_1} D_{i_2} \frac{\partial L}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \right] + \dots \Bigg\}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha \sum_{J} (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J} + \operatorname{Div} A = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha E_\alpha(L) + D_1 A^1 + \dots + D_n A^n$$

kde $A^i = \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \hat{\eta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{j=1}^{n} \left[(D_j \hat{\eta}^\alpha) \frac{\partial L}{\partial u_{ji}^\alpha} - \hat{\eta}^\alpha D_j \frac{\partial L}{\partial u_{ji}^\alpha} \right] + \dots \right.$

Dosazení do $(*)$ máme

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha E_\alpha(L) + \operatorname{Div}(A + L\xi)$$

a tedy $\operatorname{Div} \Phi = \sum_{\alpha=1}^{m} \hat{\eta}^\alpha E_\alpha(L) \underset{\uparrow}{=} 0$
pro řešení E-L rovnic

zachovávající se toky jsou

$$\Phi^i = -A^i - L\xi^i$$

Příklady na použití věty Noetherové. $\Phi^i = \sum_\alpha \sum_j \xi^j v^\alpha_j \frac{\partial L}{\partial v^\alpha_i} - \sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\alpha_i} - L\xi^i$

1) Soustava N hmotných inter. bodů bez vnějšího pole

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x) = T - V$$

Newton. pohyb. rovnice $m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ ... jsou invariantní při

translaci v čase $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\begin{pmatrix} \xi = 1 \\ \eta = 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow E = \Phi^1 = -L + \sum_{\alpha=1}^{3N} v^\alpha_t \frac{\partial L}{\partial v^\alpha_t} = -T + V + 2T = T + V$

$\{ v^1 = x_1, v^2 = y_1, \ldots v^4 = x_2 \}$

translace v prostoru všech částic najednou

$$X_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \left(\begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta^\alpha = 1 \text{ pro } \alpha = 1, 4, \ldots \\ \eta^\alpha = 0 \text{ pro } \alpha = 2, 3, 5, 6 \ldots \end{array} \right) \Rightarrow -P_x = \Phi^1 = -\sum_\alpha \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial v^\alpha_t} = -\sum_i m_i \dot{x}_i$$

a podobně pro y a z

ověříme, že jde o var. symetrii $X_2^{(1)} = X_2$ (jde o translaci)

$$X^{(1)} L + L \cancel{\mathrm{Div}\,\xi}^{\,0} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$ (součet sil, není-li vnější pole, musí být nulový)

2) Uvažujme 1D vlnovou rovnici $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ plynoucí z Lagrangiánu

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\psi_x^2 - \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right]$$

Tato rovnice je invariantní vůči LGT generovaným

$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad = X_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}$ $\qquad X_1^{(1)} L + L\,\mathrm{Div}\,\xi_1 = 0$

$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \quad = X_2^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t}$ $\qquad X_2^{(1)} L + L\,\mathrm{Div}\,\xi_2 = 0$

$X_3 = \frac{\partial}{\partial \psi} \quad = X_3^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \psi}$ $\qquad = 0$

$X_4 = \psi\frac{\partial}{\partial \psi} \quad X_4^{(1)} = X_4 + \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi_x} + \psi_t \frac{\partial}{\partial \psi_t}$ $\qquad X_4^{(1)} L = 2L \neq 0$ není variační

$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} \quad X_5^{(1)} = X_5 - \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi_x} - \psi_t \frac{\partial}{\partial \psi_t}$ $\qquad X_5^{(1)} L + L\,\mathrm{Div}\,\xi_5 = -2L + 2L = 0$

odpovídající LZZ jsou obecně dány vztahy $\mathrm{Div}\,\Phi = D_x \Phi^x + D_t \Phi^t = 0$

$$\Phi^x = (\xi^x \psi_x + \xi^t \psi_t - \eta)\frac{\partial L}{\partial \psi_x} - L\xi^x$$

$$\Phi^t = (\xi^x \psi_x + \xi^t \psi_t - \eta)\frac{\partial L}{\partial \psi_t} - L\xi^t$$

Pro X_1 a X_2 dostaneme

$$\left.\begin{array}{l}
\Phi_1^x = \psi_x \frac{\partial L}{\partial \psi_x} - L\xi_1^x = \frac{1}{2}\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right) \\
\Phi_1^t = \psi_x \frac{\partial L}{\partial \psi_t} = -\frac{1}{c^2}\psi_x\psi_t \\
\Phi_2^x = \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_x} = \psi_x\psi_t \\
\Phi_2^t = \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} - L\xi_2^t = -\frac{1}{2}\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right)
\end{array}\right\}$$

splňují $\mathrm{Div}\,\Phi = 0$ a lze je psát souhrnně ve tvaru $T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0$

kde $T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} P_1^x & P_1^t \\ P_2^x & P_2^t \end{pmatrix}$

Pro X_3 dostaneme původní rovnici, neboť

$$\Phi_3^x = -\frac{\partial L}{\partial \psi_x} = -\psi_x, \quad \Phi_3^t = -\frac{\partial L}{\partial \psi_t} = \frac{1}{c^2}\psi_t \Rightarrow -D_x\psi_x + \frac{1}{c^2}D_t\psi_t = 0$$

Konečně pro X_5 bychom dostali

$$\phi_5^x = \frac{1}{2} x \left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right) + t\psi_t\psi_x$$

$$\phi_5^t = -\frac{x}{c^2}\psi_t\psi_x - \frac{1}{2}t\left(\psi_x^2 + \frac{1}{c^2}\psi_t^2\right)$$

vskutku vyjde

$$D_x\phi_5^x + D_t\phi_5^t = 0$$

Zobecnění teorému E. Noetherové

Noetherovskou symetrií funkcionálu $\mathscr{L}[u]$ je LGT generovaná X, pro který platí $X^{(k)}L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = \mathrm{Div}\,B$. Lze ukázat, že pokud X generuje Noeth. symetrii, pak generuje též symetrii přísl. E-L rovnic.

V tomto případě je zachovávající se tok $\Phi = B - A - L\xi$

Příklady

1) N hmotných bodů $L = \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dots) - V(x)$, kde V je translačně inv.

inf. gen.

$$X = \sum_{i=1}^{N} t\frac{\partial}{\partial x_i}$$ generuje Gal. transformaci $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon t$

přičemž

$$X^{(1)} = X + \sum_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \Rightarrow X^{(1)}L \overset{\xi=0}{=} \sum_i \left(m_i\dot{x}_i - t\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{x}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i x_i = \mathrm{Div}\,B$$

a tedy přísl. ZZ je

$$\Phi = B - A = \sum m_i x_i - t\sum m_i\dot{x}_i = \text{konst} = \text{poč. poloha těžiště ve směru osy } x$$