# Variační symetrie

## Variační počet - shrnutí

- mějme jako obvykle prostor $(x,u)$ nezávislých $x=(x^1,\dots,x^n)$
  a ~~závislých~~ závislých $u=(u^1,\dots,u^m)$ proměnných

- nechť $\Omega \subset X$ (pouze nezávislé proměnné) je otevřená souvislá podmnožina
  s hladkou hranicí $\partial\Omega$

  pak variačním problémem rozumíme nalezení extrému funkcionálu

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x,u,\partial u,\dots \partial^l u)\, d^n x$$

  na jisté třídě (závisející na přítomných derivacích a okraj. podmínkách)
  funkcí $u=f(x)$ definovaných na $\Omega$.

  Pozn. $[u]$ značí závislost na $u$ a derivacích $\partial u \dots$
  $L(x,u,\partial u,\dots \partial^l u) = L(x,u^{(l)})$ je langrangián, což je hladká fce $x,u,\partial u \dots$

- variační derivace (variace) funkcionálu $\mathcal{L}[u]$ je jednoznačně určená

  $m$-tice $\quad \delta\mathcal{L}[u] = (\delta_1\mathcal{L}, \delta_2\mathcal{L},\dots \delta_m\mathcal{L})$

  určená vztahem $\quad \left.\dfrac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}[f+\varepsilon\eta] = \displaystyle\int_\Omega \delta\mathcal{L}[f(x)]\cdot\eta(x)\, d^n x$

  kde $f(x)$ je hladká fce na $\Omega$ a $\eta(x) = (\eta^1(x),\dots \eta^m(x))$ je hladká
  s kompaktním nosičem na $\Omega$

  (a tedy $f(x)$ a $f(x)+\varepsilon\eta(x)$ má stejné okraj. podmínky)

  a $\delta_\alpha\mathcal{L}[u]$ je variační derivace vzhledem k $u^\alpha$, kterou lze
  určit pomocí Eulerova operátoru

$$\delta_\alpha\mathcal{L} = E_\alpha(L) = \sum_J (-D)_J \frac{\partial L(x,u,\dots)}{\partial u^\alpha_J}$$

  kde $\quad (-D)_J = (-1)^k D_J = (-D_{j_1})(-D_{j_2})\dots(-D_{j_k})$

  pro multiindex $\quad J=(j_1,\dots j_k) \quad$ a úplnou (totální) derivaci

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_\alpha u^\alpha_j \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \dots \sum_{\alpha, i_1, \dots i_p} u^\alpha_{i_1,\dots i_p j} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1,\dots i_p}} + \dots$$

- pokud je $u=f(x)$ extrém $\mathcal{L}[u]$, pak $\delta\mathcal{L}[f]=0$, tj. $\delta_\alpha\mathcal{L}=0$ pro $\forall\alpha$
  a je-li $f(x)$ dostatečně hladká, pak musí být řešením
  Eulerových-Lagrangeových rovnic $\quad E_\alpha(L)=0 \quad$ pro $\alpha=1,\dots,m$

Př. Dirichletův princip ⇒ Laplaceova rovnice

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 d^n x = \int_\Omega \frac{1}{2}\sum u_i^2 d^n x \quad , \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} \quad , \quad \Omega \subset X = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \quad \delta\mathcal{L}[u] = 0 = E(L) \underset{\substack{\text{jiné derivace}\\ \text{nepřispívají}}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-D_i)\frac{\partial L}{\partial u_i} = -\sum_{i=1}^{n} D_i(u_i) = -\Delta u$$

---

• nulové a ekvivalentní lagrangiány (tj. nejen pro řešení variační úlohy, ale pro lib. $u$)

- pokud jsou E-L rce identicky nulové, mluvíme o nulovém lagrangiánu

Př. $\mathcal{L}[u] = \int_a^b u u_x \, dx \Rightarrow \delta\mathcal{L} = u_x - D_x(u) = 0$

(neboť $\mathcal{L}[u] = \int_a^b D_x\left(\frac{u^2}{2}\right)dx = \frac{u^2}{2}\Big|_{x=a}^{b}$ a tedy lib. fce $u = f(x)$ se správnými okr. podm. dává stejné $\mathcal{L}[u]$)

• obecně pokud $L = \mathrm{Div}\, P$ pro jisté $P = (P_1, \dots P_n)$, kde $\mathrm{Div}\, P = D_1 P_1 + \dots + D_n P_n$ je úplná divergence

pak $E(L) = 0$ a $L(x, u^{(k)})$ je tedy nulový lagrangián

$$\left(\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L \, d^n x = \int_\Omega \mathrm{Div}\, P \, d^n x = \int_{\partial\Omega} P \cdot dS \text{, což závisí pouze na } \partial\Omega\right)$$

[Platí i obrácené (viz Olver):
Pokud $E(L) = 0$ pro skalár $L(x, u, \dots)$ a lib. $u$,
pak musí být $L = \mathrm{Div}\, F(x, u)$]

---

• variační symetrie

- lokální grupa bodových transformací $G$ na prostoru $M \subset \Omega_0 \times U$ je grupou variační symetrie funkcionálu $\mathcal{L}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(k)}) \, d^n x$

pokud pro lib. $\Omega \subset \Omega_0$, $u = f(x)$ hladkou na $\Omega$ a její obraz $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ při bod. transf. $\tilde{x} = F(x, u; \varepsilon)$, $\tilde{u} = G(x, u; \varepsilon)$ definovaný na $\tilde{\Omega} \subset \Omega_0$

platí $\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \tilde{f}(\tilde{x}), \dots \tilde{f}^{(k)}(\tilde{x})) \, d^n\tilde{x} = \int_\Omega L(x, f(x), \dots) \, d^n x$

• infinitezimální kritérium variační symetrie

- uvažujme transf. $\tilde{x}^i = F^i(x, u; \varepsilon)$, $\tilde{u}^\alpha = G^\alpha(x, u, \varepsilon)$ jako ~~změnu~~ souřadnic u vícerozměrného integrálu

$$\int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{x}, \tilde{u}, \dots) \, d\tilde{x} = \int_\Omega L(\tilde{x}(x, u(x), \varepsilon), \tilde{u}(x, u, \varepsilon) \dots) \det J_\varepsilon(x, u(x) \dots) \, d^n x = \int_\Omega L(x, u \dots) \, d^n x$$

což má platit pro lib. $\Omega \subset \Omega_0$ a $u = f(x)$ a tedy musí platit pro infin. transf.

$$L(x + \varepsilon\xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2), u + \varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), u^{(1)} + \varepsilon\eta^{(1)} \dots) \begin{vmatrix} \frac{d(x^1 + \varepsilon\xi^1(x, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))}{dx^1} & \frac{d(x^1 + \varepsilon\xi^1 + \dots)}{dx^2} & \dots \\ & \ddots & \\ & & \frac{d(x^n + \varepsilon\xi^n)}{dx^n} \end{vmatrix}$$

pro $J_\varepsilon^{ij} = D_i F^j(x, u, \varepsilon)$

$1 + \varepsilon D_n \xi^n + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ a pod.

$$\frac{dL}{d\varepsilon} = \xi^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} + \dots = X^{(k)} L$$

$$= \left(L(x, u^{(k)}) + \varepsilon X^{(k)} L + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)\left(1 + \varepsilon \mathrm{Div}\, \xi + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right) = L(x, u^{(k)})$$

neboli $\boxed{X^{(k)} L + L\, \mathrm{Div}\, \xi = 0}$ (pro libovolné $u$)

Lze ukázat, že generuje-li $X$ variační symetrii, pak jde též o symetrii E-L rovnic ovšem ne naopak! (např. škálování $u$)