Využití bodových symetrií při řešení PDR

- není obecná metoda, jak řešit PDR

$$R^\sigma(x,u,\partial u,\dots \partial^k u)=0 \quad , \sigma=1,\dots,N$$

  - řešení ODR závisí na k konstantách (v principu k integrací)
  - řešení PDR obecně závisí na lib. funkcích (okrajové podmínky podél křivek, na nadplochách)

  $\Rightarrow$ typicky nekonečně mnoho řešení

- symetrie umožňují hledat partikulární řešení
- 3 základní metody

1) konstrukce nového řešení z jiného přímo pomocí konečné bodové transformace

Př.: rovnice vedení tepla $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$

řešení $u(x,t)=A$ je pomocí bod. symetrie generované

$$X=2t\frac{\partial}{\partial x}-ux\frac{\partial}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\tilde x &= x+2\varepsilon t\\ \tilde t &= t\end{aligned} \quad \tilde u = u e^{-\varepsilon x-\varepsilon^2 t}$$

převedeno na netriviální řešení

$$u(x,t)=A e^{-\varepsilon x+\varepsilon^2 t} \quad \text{pro lib. } \varepsilon$$

[Pomocí $\tilde u(\tilde x,\tilde t)=G^\mu(F(\tilde x,\tilde u,\varepsilon^{-1}),\Theta(F(\tilde x,\tilde u,\varepsilon^{-1})),\varepsilon)$, viz dříve]

2) pro lineární PDR lze využít ke konstrukci nových řešení přímo infinitezimální operátory

- mějme lineární PDR $\quad H^\sigma u = G^\sigma(x) \quad , \sigma=1,\dots,N \quad (*)$

kde H^σ je lineární diferenciální operátor

$$H^\sigma(x)\,u=\sum_{\alpha=1}^{m} b^\sigma_\alpha(x)\,u^\alpha+\sum_{\alpha,j} b^\sigma_{\alpha j}(x)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j}+\sum_{\alpha,j,k} b^\sigma_{\alpha jk}(x)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}+\dots$$

[Př. rovnice vedení tepla $u_{xx}=u_t$, zde bychom měli $G^1=0$, $H^1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}$, neboli $b^1_1=0$, $b^1_{1t}=-1$, $b^1_{1x}=0$, $b^1_{1xx}=1$ atd.]

- systém $(*)$ je vždy invariantní vůči bodovým symetriím generovaným $X_\infty=\sum_{\alpha=1}^{m}\eta^\alpha(x)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$

  kde $\eta^\alpha(x)$ je řešením homogenní rovnice $H^\sigma\eta(x)=0$

nebot' $(\xi=0)$ $$X^{(k)} = X + \sum_{\alpha, j} (D_j \eta^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_j} + \sum_{\alpha, j_1, j_2} (D_{j_1} D_{j_2} \eta^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{j_1 j_2}} + \dots$$

a tedy $$X^{(k)} (H^\sigma u - G^\sigma) \Big|_{H^\sigma u = g^\sigma} = \sum_\alpha b^\sigma_\alpha(x) \eta^\alpha(x) + \sum_{\alpha, j} b^\sigma_{\alpha j}(x) \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} + \dots - \underbrace{X^{(k)} G^\sigma(x)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{nebot' } \xi = 0}}$$

$$= H^\sigma(x) \eta(x) = 0$$ (dle předpokladu o η)

- pokud kromě X_∞ má rovnice (*) ještě r jiných nezávislých bodových symetrií generovaných $X_1, \dots, X_r$, pak pro libovolné dva inf. oper.

$$X = \sum_{j=1}^r a_j X_j + \sum_\alpha f^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad \text{a} \quad Y = \sum_{j=1}^r b_j X_j + \sum_\alpha g^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

bude též $$Z = [X, Y] = \sum_{j=1}^r c_j X_j + \sum_\alpha h^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

infinitezimálním operátorem a $h^\alpha(x)$ musí být též řešením $H^\sigma h = 0$, a tedy i $H^\sigma(u + h) = G^\sigma$ bude řešením (*)

(Pro homogenní rovnice takto generujeme přímo řešení.)

Př. uvažujme rovnici vedení tepla $u_{xx} = u_t$

a jako $X = X_5 = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}$ a $Y = g(x,t) \frac{\partial}{\partial u}$, kde $g(x,t)$ je libovolné řešení $u_{xx} = u_t$

pak $$Z = [X, Y] = \left(2t \frac{\partial g}{\partial x} + xg\right) \frac{\partial}{\partial u} = h(x,t) \frac{\partial}{\partial u}$$

a z lib. řešení g takto generujeme nekonečnou posl. nových řešení

např. z $g(x,t) = A = \text{konst}$ postupně dostáváme

$$h_1 = Ax \Rightarrow h_2 = A(2t + x^2) \Rightarrow h_3 = A(6tx + x^3) \quad \text{atd.}$$

Pozn: tato metoda úzce souvisí se zvedacími a snižovacími operátory v QM pro Schrödingerovu rovnici s fixní energií E,

kde jako X volíme $J_1 \pm i J_2$, kde J_1 a J_2 jsou oper. momentu hybnosti

a jako $Y = \psi_{nem} \frac{\partial}{\partial \psi}$ s konkrétní volbou ψ_{nem}

pak nutně $$Z = [X, Y] = [(J_1 \pm i J_2) \psi_{nem}] \frac{\partial}{\partial \psi}$$

dává též řešení při stejné energii E, ovšem ne vždy nenulové!

(nulové řešení $\psi = 0$ je též řešením)

3) invariantní řešení PDR

- pro jednoduchost uvažujme skalární PDR k-tého řádu

$$R(x, u, \partial u, \dots \partial^k u) = 0 \qquad (1)$$

(obecnější případ je obdobný níže uvedenému postupu, viz Bluman)

a nechť je tato rovnice invariantní při bodové transformaci generované

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$$

tj. platí inf. kritérium $\quad X^{(k)} R \big|_{R=0} = 0$

- řešení $u = f(x)$ rovnice (1) nazveme <u>invariantní</u> vůči transf. generované X, pokud $u - f(x) = 0$ je invariantní nadplocha v prostoru (x, u) při této transformaci, tj. platí inf. kritérium inv. této nadplochy

$$X\left(u - f(x)\right)\Big|_{u=f} = 0$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(x, f(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} = \eta(x, f(x)) . \qquad (2)$$

- nejjednodušší případ nastává, pokud rovnice (1) nezávisí explicitně na jedné z nezávislých proměnných, řekněme x^n. Pak je (1) inv. vůči translaci v této proměnné, tj. $X = \frac{\partial}{\partial x^n}$ a podmínka (2) se redukuje na $\frac{\partial f}{\partial x^n} = 0$ a hledáme řešení nezávislé na x^n položením všech derivací podle x^n rovny nule.

Př. rce vedení tepla $\quad u_{xx} = u_t$

nezávisí explicitně na x a na t $\Rightarrow \exists$ řešení $u = f_1(x)$ a $u = f_2(t)$

pro f_1 dostaneme $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow f_1(x) = Ax + B$ ← inv. vůči translaci v čase

pro f_2 dostaneme $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \Rightarrow f_2(t) = A$ ← inv. vůči translaci v prostoru

- pokud $\xi^i = 0$ pro všechna i, pak je invariantní řešení dáno implicitně rovnicí $\eta(x, f(x)) = 0$

  např. je-li $X = u\frac{\partial}{\partial u}$ generátorem symetrie (škálování v u)

  pak $u = 0$ je řešením rovnice

- v obecném případě (2) bude alespoň jedno $\xi^i \neq 0$

  a přechodem ke „kanonickým" proměnným $(y^1, \ldots, y^n, v)$

  splňujícím
$$\left.\begin{aligned} X y^i &= 0 \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n-1 \\ X y^n &= 1 \\ X v &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X^{(y,v)} = \frac{\partial}{\partial y^n}$$

  (oproti dříve ~~ne~~závislá proměnná v splňuje $Xv = 0$ a jedna z nezávislých proměnných $Xy^n = 1$, u (r,s) tomu bylo naopak, ale i tak jde o kanonické proměnné vůči X)

  dostaneme novou PDR nezávislou explicitně na y^n a hledáme tedy řešení $v = H(y^1, \ldots, y^{n-1})$.

  Řešení (1) je pak implicitně dáno pomocí
$$v(x,u) = H(y^1(x,u), \ldots, y^{n-1}(x,u)) \qquad (3)$$

- pokud $y^1, \ldots, y^{n-1}$ nezávisí na u, pak lze u z (3) vyjádřit přímo a dosazením do (1) dostaneme rovnici pro H, aniž bychom prováděli změnu souřadnic v (1)

  $\Rightarrow$ <u>metoda invariantní formy</u> (invariant form method dle Blumana)

Př. aplikujme tuto metodu na nalezení netriviálního řešení rovnice vedení tepla $u_{xx} = u_t$

použijeme $X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$

a tedy inv. řešení musí splňovat

$$X(u - f(x,t))\big|_{u=f} = -2t\frac{\partial f}{\partial x} - xf = 0$$

metodou charakteristik nalezneme kanonické proměnné y^1 a v

(y^2 nepotřebujeme)

protože X nezávisí na $\frac{\partial}{\partial t}$, bude $y^1 = t$

v je pak „konstantou" po integraci rce charakt. $\frac{dx}{2t} = \frac{du}{-xu}$

kde t figuruje jako parametr $\Rightarrow$ $-x\,dx = 2t\frac{du}{u}$

a tedy $-\frac{x^2}{2} = 2t\ln u + C$ $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{naše volba}}}{v(x,t,u) = -2C} = x^2 + 4t\ln u$

invariantní řešení je tedy dáno implicitně pomocí

$$x^2 + 4t\ln u = v(x,t,u) = H(y^1(x,t,u)) = H(t)$$

z čehož
$$u = e^{\frac{H(t)-x^2}{4t}}$$

a dosazením do $u_{xx} = u_t$ máme rovnici pro $H(t)$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{H}{t} - 2 \qquad (4)$$

z pedagogických důvodů vyřešíme tuto rovnici pomocí symetrie, je totiž invariantní vůči škálování

$$X^H = t\frac{\partial}{\partial t} + H\frac{\partial}{\partial H}$$

kanon. souřadnice této transf. jsou $r = \frac{H}{t}$, $s = \ln t$

odkud $\frac{ds}{dr} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $s = -\frac{r}{2} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{konstanta}}}{K}$ $\Rightarrow$ $\ln t = -\frac{1}{2}\frac{H}{t} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vhodná volba}}}{\ln A^2}$

Nakonec dostaneme $H(t) = -2t\ln\frac{t}{A^2}$

a tedy
$$u = e^{\frac{H(t)-x^2}{4t}} = \frac{A}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Pozn.: pokud bychom našli i y^2 pomocí $Xy^2 = 1$, např. $y^2 = \frac{x}{2t}$

a převedli $u_{xx} = u_t$ do souřadnic (y^1, y^2, v), dostali bychom

$$v_{y^2y^2} + \frac{1}{4y^1}v_{y^2}^2 - 4y^1\underbrace{(y^1 v_{y^1} + v - 2y^1)}\, = 0$$

což je vskutku rovnice explicitně nezávislá na y^2

a položením $v = H(y^1)$ dostaneme opět $t\frac{\partial H(t)}{\partial t} + H(t) - 2t = 0$.

- možná vás napadlo, že bychom také mohli přímo dosadit do $u_{xx} = u_t$ z podmínky $-2t\frac{\partial f}{\partial x} - xf = 0$

toto je druhá možnost a jde o tzv. <u>metodu přímé substituce</u>

kdy obecně vyjádříme z $\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = \eta(x,u)$

např. (BÚNO předpokládáme, že $\xi^n \neq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x^n} = \frac{\eta}{\xi^n} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi^i}{\xi^n}\frac{\partial u}{\partial x^i} \qquad (5)$$

a proderivujeme, abychom v (1) nahradili všechny derivace podle x^n výrazy závisejícími na $x^1, \dots x^{n-1}$ a u a derivacemi nezávislými na x^n. Dostaneme tak PDR, kde x^n bude hrát roli parametru. Řešení této (jednodušší) PDR budou inv. řešeními (1), pokud ještě dosadíme opět do (5) a ověříme, že je toto splněno.

- pokud $n=2$, pak z PDR dostaneme ODR, jejíž řešení závisí na „konstantách", které jsou ovšem funkcemi x^n a dosazením do (5) nalezneme i jejich obecný tvar.

Př. ukažme, že pro $u_{xx} = u_t$ a $X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}$ dostaneme stejný výsledek jako metodou invariantní formy

nyní (5) bude mít tvar $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\eta}{\xi^x} = -\frac{xu}{2t}$

z čehož $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{u}{2t} - \frac{x}{2t}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{2t} + \left(\frac{x}{2t}\right)^2 u$

a dosazením do $u_{xx} = u_t$ dostaneme — opět vhodně zvolená konstanta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) \Rightarrow \ln u = -\frac{x^2}{4t} - \frac{1}{2}\ln t + \ln G(x)$$

neboli $u(x,t) = \frac{G(x)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ a dosazením do $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu}{2t}$

získáme rovnici pro $G(x)$: $e^{-\frac{x^2}{4t}}\left[\frac{G'(x)}{\sqrt{t}} - \cancel{\frac{x}{2t}\frac{G(x)}{\sqrt{t}}}\right] = \cancel{-\frac{x}{2t}\frac{G(x)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}$

neboli $G'(x) = 0 \Rightarrow G(x) = A$ a tedy $u(x,t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

což jsme chtěli ukázat.