Příklad na hledání PDR zadané symetrie

- pro jednoduchost hledejme lineární homogenní PDR 2. řádu pro skalární funkci $\psi(x^0,x^1,x^2,x^3)$ invariantní vůči Poincarého grupě s 10 inf. generátory

$$X_j = \varepsilon_{jkl}\, x^k \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad j=1,2,3 \quad \leftarrow \text{generátory prostor. rotací}$$

$$X_{3+j} = x^j \frac{\partial}{\partial x^0} + x^0 \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad j=1,2,3 \quad \leftarrow \text{gen. Lorentzových transf.}$$

$$X_7 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad X_{7+j} = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad j=1,2,3 \quad \leftarrow \text{gen. translací v čase a prostoru}$$

- přestože bychom v principu mohli hledat obecnou

$$R\left(x^\mu, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right) = 0$$

omezíme se na hledání lin. hom. rce

$$(*) \qquad R = c\psi + a^\alpha \psi_{,\alpha} + b^{\mu\nu} \psi_{,\mu\nu} = 0 \qquad \text{kde } \psi_{,\alpha} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \text{ apod.}$$

(pozn: závislost na x^μ je vyloučena translacemi v x^μ)
členy typu $\psi_{,12}$ a $\psi_{,21}$ apod. jsou sice stejné, ale pro zjednodušení je nebudeme uvažovat odděleně

- uvažujme nejprve Lorentz. transformace, jejichž rozšíření do derivací je

$$X^{(2)}_{3+j} = X_{3+j} + \eta^j_\mu \frac{\partial}{\partial \psi_{,\mu}} + \eta^j_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \psi_{,\mu\nu}}, \quad \text{kde} \quad \eta^j_\mu = -\delta_{\mu 0}\psi_{,j} - \delta_{\mu j}\psi_{,0}$$

$$\eta^j_{\mu\nu} = -\delta_{\mu j}\psi_{,0\nu} - \delta_{\mu 0}\psi_{,j\nu} - \delta_{\nu 0}\psi_{,\mu j} - \delta_{\nu j}\psi_{,\mu 0}$$

a inf. krit. dává (pro $j=1,2,3$)

$$X^{(2)}_{3+j}\left(c\psi + a^\mu \psi_{,\mu} + b^{\mu\nu}\psi_{,\mu\nu}\right)\Big|_{R=0} = a^\mu \eta^j_\mu + b^{\mu\nu}\eta^j_{\mu\nu}\Big|_{R=0} = 0$$

↑ pokud vyjádříme ψ z $(*)$ ~~tak $|_{R=0}$~~ nedává žádné omezení

z čehož

$$0 = \underbrace{-a^0\psi_{,j} - a^j\psi_{,0}}_{\Downarrow} + \underbrace{b^{j\nu}\psi_{,0\nu} + b^{0\nu}\psi_{,j\nu} + b^{\mu 0}\psi_{,\mu j} + b^{\mu j}\psi_{,\mu 0}}$$

$a^0 = a^j = 0$
rce nemůže záviset lineárně na prvních derivacích

$$\psi_{,00}\left(b^{j0} + b^{0j}\right) = 0 \Rightarrow b^{0j} = b^{j0} = 0$$
(díky symetrii $b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu}$)

$$\psi_{,01}\left[b^{j1} + b^{1j} + \delta_{j1}\left(b^{00} + b^{00}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow b^{12} = b^{13} = 0, \quad b^{00} + b^{11} = 0$$

a pod. pro $\psi_{,02}$ a $\psi_{,03}$ $\Rightarrow$ $b^{23} = 0$, $\quad b^{00} + b^{22} = 0$, $\quad b^{00} + b^{33} = 0$

- rotace již další podmínky nepřidají a tedy

$$R = c\psi + b^{00}\left(\psi_{,00} - \psi_{,11} - \psi_{,22} - \psi_{,33}\right) = 0$$

jediná konst $\frac{c}{b^{00}} \equiv m^2 \Rightarrow m^2\psi + \Box\psi = 0$ (Kleinova-Gordonova rovnice)