Bodové symetrie klasického centrálního problému

- uvažujme Newtonovy pohybové rovnice pro sféricky symetrický potenciál $V(r)$, tj. systém ODR

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -V'(r)\frac{x}{r}$$
$$m\ddot{y} = -V'(r)\frac{y}{r}$$
$$m\ddot{z} = -V'(r)\frac{z}{r}$$

a hledejme bodové transformace s inf. generátory ve tvaru

$$X = \xi(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^x(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^y(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^z(t,x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

pomocí infinitezimálního kritéria

(*) $$X^{(2)}\left(m\ddot{x} + V'(r)\frac{x}{r}\right)\Big|_{m\ddot{\vec{r}} = -V'(r)\frac{\vec{r}}{r}} = 0$$ a podobně pro rovnice z y a z

- s využitím Mathematicy, kde jsme jako první (obecný) ansatz použili $\xi = \Xi$, $\eta^x = \alpha$, $\eta^y = \beta$, $\eta^z = \gamma$ (viz notebook na webu), dostaneme podmínky (mimo mnoha dalších, ne už tak přehledných), (jde o koeficienty v polynomiálním výrazu v proměnných $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, které musí být nulové)

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial z} = 0$$ a pod. pro β a γ s cykl. záměnou x, y, z

a také $\frac{\partial^2\Xi}{\partial x^2} = 0$ atd. pro derivace „podle" y^2, z^2, xy, xz a yz

odtud vidíme, že $\Xi(t,x,y,z)$ je lineární v x, y i z

a $\alpha(t,x,y,z)$ je lineární v y a z a pod. β v x a z, a γ v x a y

tedy ansatz se dá zjednodušit na (2. ansatz v Mathematice)

$$\xi = \delta_x(t)\,x + \delta_y(t)\,y + \delta_z(t)\,z + \delta_0(t)$$
$$\eta^x = \alpha_y(t,x)\,y + \alpha_z(t,x)\,z + \alpha_0(t,x)$$
$$\eta^y = \beta_x(t,y)\,x + \beta_z(t,y)\,z + \beta_0(t,y)$$
$$\eta^z = \gamma_x(t,z)\,x + \gamma_y(t,z)\,y + \gamma_0(t,z)$$

- dosazením opět do (*) dostaneme např.

$$\frac{\partial \alpha_y(t,x)}{\partial x} = \frac{d\delta_y(t)}{dt} \Rightarrow \alpha_y(t,x) = \underbrace{\delta_y'(t)\, x + \alpha_y^0(t)}_{\text{zatím obecné fce času}}$$

a pod. pro $\alpha_z, \beta_x, \beta_z, \gamma_x$ a $\gamma_y \Rightarrow$ jsou lineární v prostorových souřadnicích

a dále $\dfrac{\partial^2 \alpha_0(t,x)}{\partial x^2} = 2\,\dfrac{d\delta_x(t)}{dt} \Rightarrow \alpha_0(t,x) = \delta_x'(t)\, x^2 + \alpha_0^1(t)\, x + \alpha_0^0(t)$

a pod. pro $\beta_0(t,y)$ a $\gamma_0(t,z)$, které jsou kvadratické v y, resp. v z

- nyní máme 3. ansatz, kde už jsou pouze neznámé funkce času t a podmínky (*) dají polynom v $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ a kvůli přítomnosti $V(r)$ i komplikovanější funkci v $x, y, a\ z$, ovšem která musí být nulová pro lib. hodnoty x, y, z.
- Dosazením opět v Mathematice nalezneme např. podmínky:

$\alpha_y^0(t)$, $\alpha_z^0(t)$, $\beta_x^0(t)$, $\beta_z^0(t)$, $\gamma_x^0(t)$ a $\gamma_y^0(t)$ musí být konstanty

a navíc $\alpha_y^0 = -\beta_x^0$, $\alpha_z^0 = -\gamma_x^0$ a $\beta_z^0 = -\gamma_y^0$

protože už žádné další podmínky se pro tyto koeficienty neobjeví, dostáváme očekávané generátory rotací

$X_1 = y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}$ (položením $\gamma_y^0 = 1$ a ostatních nezávislých koeficientů 0),

$X_2 = z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}$ $(\alpha_z^0 = 1)$,

$X_3 = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$ $(\beta_x^0 = 1)$

což je přímý důsledek volby $V = V(r)$, tj. sféricky symetrického potenciálu

- dále z 3. ansatzu též dostaneme podmínky

$\alpha_0^0(t)\,[V'(r) - rV''(r)] = 0$ a pod. pro $\beta_0^0(t)$ a $\gamma_0^0(t)$

a tedy pokud $V'(r) = rV''(r)$, bude mít problém speciální symetrie, neboť pak α_0^0, β_0^0 a γ_0^0 mohou být nenulové.
To nastává pouze pro $V(r) = a_1 r^2 + a_2$ s a_1 a a_2 konstantami, tj. pro volnou částici a lin. harmonický oscilátor, pro které máme 3 nezávislé jednorozměrné rovnice a mnoho symetrií.

- dále se budeme zabývat případem $V'(r) \neq rV''(r)$,
  pak $\alpha_0^0 = \beta_0^0 = \gamma_0^0 = 0$ a též $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0$, neboť
  podmínk typu $\delta_x(t)\, V'(r) + mr\, \delta_x''(t) = 0$ jsou netriviální opět
  pouze pro $V(r) = a_1 r^2 + a_2$.
- konečně z podmínek jako
  $$\frac{d^2\alpha_0^1(t)}{dt^2} = 0 \quad \text{apod. pro } \beta_0^1 \text{ a } \gamma_0^1 \Rightarrow \text{linearita v } t$$
  a $$2\,\frac{d\alpha_0^1(t)}{dt} = \frac{d^2\delta_0(t)}{dt^2} \Rightarrow \delta_0 \text{ je kvadratická v } t$$
  a tedy 4. ansatz je (nejobecnější pro $V'(r) \neq rV''(r)$)
  $$\xi(t,x,y,z) = \delta_0^2 t^2 + \delta_0^1 t + \delta_0^0$$
  $$\eta^x(t,x,y,z) = c_1 y + c_2 z + (\delta_0^2 t + \alpha_0)x$$
  $$\eta^y(t,x,y,z) = -c_1 x + c_3 z + (\delta_0^2 t + \beta_0)y$$
  $$\eta^z(t,x,y,z) = -c_2 x - c_3 y + (\delta_0^2 t + \gamma_0)z$$
- odtud ještě dostaneme podmínky
  $$\delta_0^2\left[3V'(r) + rV''(r)\right] = 0 \Rightarrow \delta_0^2 = 0, \text{ ledaže je } V(r) = \frac{b_1}{r^2} + b_2$$
  a $(2\delta_0^1 - \alpha_0)V'(r) + \alpha_0 r V''(r) = 0$ apod. pro β_0 a γ_0
  $\Rightarrow \alpha_0 = \delta_0^1 = 0$ pro obecný potenciál (a též $\beta_0 = \gamma_0 = 0$)
  nebo pro $V(r) = b_1 r^N + b_2$, kdy bude
  $$(2\delta_0^1 - \alpha_0)N + \alpha_0 N(N-1) = 0 \quad (\text{a stejně pro } \beta_0 \text{ a } \gamma_0)$$
  a tedy $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \dfrac{2\delta_0^1}{2-N}$ pro $N \neq 2$
  pro $N=2$ máme $\delta_0^1 = 0$ a $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ libovolné
  (jde o případ lin. harmonického oscilátoru, u kterého lze škálovat prostor. proměnné lib. a perioda se nemění)
- <u>Shrnutí</u>: Obecný $V(r)$ – 4-par. LGT – prostorové rotace
  \+ translace v čase ($\delta_0^0 \neq 0$)
  X_1, X_2, X_3 viz výše a $X_4 = \frac{\partial}{\partial t}$
  pro $V(r) = b_1 r^N + b_2$ navíc škálování $X_5 = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{2-N}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$
  a pro $N=-2$ ještě projektivní transf. $X_6 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$

  pro $N=-1$ plyne z X_5 3. Keplerův zákon
  $$\tilde{t} = \alpha t, \quad \tilde{r} = \alpha^{2/3} r \Rightarrow \frac{t^2}{r^3} = \text{konst.}$$