Invariance systému diferenciálních rovnic při bodových transformacích

<u>Def:</u> r-param. lokální Lieovu grupu transformací působící na prostoru nezávislých a závislých proměnných (x,u)

$$\tilde{x} = F(x,u,\varepsilon)$$
$$\tilde{u} = G(x,u,\varepsilon)$$

nazveme grupou (bodových) symetrií systému PDR

$$R^\sigma(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u) = 0, \quad \sigma = 1,\dots,N$$

pokud po rozšíření těchto transformací do prostoru derivací až do k-tého řádu zůstane tento systém nezměněn, tj. bude opět platit

$$R^\sigma(\tilde{x},\tilde{u},\partial\tilde{u},\dots\partial^k\tilde{u}) = 0, \quad \sigma = 1,\dots,N$$

- Pokud má systém $R^\sigma(x,u,\dots\partial^k u)=0$ řešení, pak je toto lib. řešení při těchto transformacích převedeno na třídu nových řešení tohoto systému parametricky závislých na ε.
  Jinými slovy nadplocha v prostoru $(x,u,\partial u,\dots\partial^k u)$ daná rovnicemi $R^\sigma=0$, na které jsou všechna řešení tohoto systému, zůstává nezměněna.
- Říkáme též, že systém $R^\sigma=0$ je invariantní při těchto bod. transf.

Infinitezimální kritérium invariance systému PDR

<u>Věta:</u> (nutná podmínka pro invarianci PDR při bod. transformacích)

Nechť $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{m} \eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ je lib. infinit. operátor r-param. LGT $\tilde{x}=F(x,u,\varepsilon)$, $\tilde{u}=G(x,u,\varepsilon)$ a nechť

$$X^{(k)} = X + \sum_{i,\alpha} \eta_i^\alpha(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \dots + \sum_{i_1,\dots,i_k,\alpha} \eta^\alpha_{i_1\dots i_k}(x,u,\dots\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\dots i_k}}$$

je jeho k-té rozšíření do prostoru derivací. Pokud je tato LGT grupou symetrie systému $R^\sigma=0$, $\sigma=1,\dots,N$, pak musí platit, že

$$\boxed{X^{(k)} R^\sigma(x,u,\partial u,\dots,\partial^k u)\Big|_{R^\sigma=0} = 0.}$$

(vyčísleno na nadploše dané $R^\sigma=0$)

Speciálně to musí platit pro lin. nezávislé inf. operátory X_α.

Důkaz: Tvoří-li transf. $\tilde{x}=F(x,u,\varepsilon)$, $\tilde{u}=G(x,u,\varepsilon)$ grupu symetrie systému $R^\sigma(x,u,\partial u,\dots \partial^k u)=0$, pak musí být

$$R^\sigma(\tilde{x},\tilde{u},\partial\tilde{u},\dots \partial^k\tilde{u})=0 \quad \text{pro } \forall\varepsilon \text{ a } \sigma=1,\dots,N.$$

Derivací podle ε_α dostaneme

$$0=\frac{\partial R^\sigma}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}=\sum_j \underbrace{\frac{\partial R^\sigma}{\partial \tilde{x}^j}\Big|_{\varepsilon=0}}_{\frac{\partial R^\sigma}{\partial x^j}}\underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}}_{\xi^j_\alpha(x)}+\sum_\mu \frac{\partial R^\sigma}{\partial \tilde{u}^\mu}\Big|_{\varepsilon=0}\frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}+\dots$$

$$\dots+\sum_{\mu,j_1,\dots j_k}\frac{\partial R^\sigma}{\partial \tilde{u}^\mu_{j_1\dots j_k}}\Big|_{\varepsilon=0}\frac{\partial \tilde{u}^\mu_{j_1\dots j_k}}{\partial \varepsilon_\alpha}\Big|_{\varepsilon=0}$$

$= X^{(k)}_\alpha R^\sigma(x,u,\partial u,\dots \partial^k u)$ vyčíslené na nadploše $R^\sigma=0$

Libovolný inf. op. X je lineární kombinací X_α, takže díky linearitě derivací musí totéž platit i pro $X^{(k)}$.

Př. 1) LHO $\ddot{x}+\omega^2 x=0=R(t,x,\dot{x},\ddot{x})$

Tato rovnice je invariantní při translaci v čase $\tilde{t}=t+\beta$ generované inf. op. $X_1=\frac{\partial}{\partial t}$ a při škálování v x, neboli při $\tilde{x}=\alpha x$ generované inf. op. $X_2=x\frac{\partial}{\partial x}$. Musí tedy platit

$$0=X_1^{(2)}(\ddot{x}+\omega^2x)\big|_{R=0}=\frac{\partial}{\partial t}(\ddot{x}+\omega^2x)\big|_{R=0}=0 \quad \checkmark$$

a

$$0=X_2^{(2)}(\ddot{x}+\omega^2x)\big|_{R=0}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\dot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}+\ddot{x}\frac{\partial}{\partial \ddot{x}}\right)(\ddot{x}+\omega^2x)\Big|_{R=0}=(\ddot{x}+\omega^2x)_{R=0}=0 \quad \checkmark$$

2) rovnice vedení tepla $u_{xx}=u_t$ je invariantní při transformacích

$$\tilde{x}=x+2t\varepsilon,\quad \tilde{t}=t,\quad \tilde{u}=u\,e^{-x\varepsilon-t\varepsilon^2}$$

s inf. op. $X=2t\frac{\partial}{\partial x}-ux\frac{\partial}{\partial u}$

$$\xi^x=2t,\quad \xi^t=0,\quad \eta=-ux$$

mělo by tedy být

$$0=X^{(2)}(u_{xx}-u_t)\big|_{u_{xx}=u_t},\quad \text{kde } X^{(2)}=X+\eta_x\frac{\partial}{\partial u_x}+\eta_t\frac{\partial}{\partial u_t}+\dots+\eta_{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

přičemž

$$\eta_x=D_x\eta-\underbrace{(D_x\xi^x)}_{0}u_x-\cancel{(D_x\xi^t)u_t}=-u-xu_x$$

$$\eta_t=D_t\eta-(D_t\xi^x)u_x=-xu_t-2u_x$$

$$\eta_{xx}=D_x\eta_x-\underbrace{(D_x\xi^x)}_{0}u_{xx}=-2u_x-u_{xx}x$$

a tedy

$$X^{(2)}(u_{xx}-u_t)\big|_{u_{xx}=u_t}=(\eta_{xx}-\eta_t)\big|_{u_{xx}=u_t}=-x(u_{xx}-u_t)\big|_{u_{xx}=u_t}=0 \quad \checkmark$$

Věta (postačující podmínka):

Mějme systém PDR $R^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^k u) = 0$, $\sigma = 1, \dots, N$, který je maximální hodnosti, tj. matice

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial R^1}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial R^1}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial R^1}{\partial u^\alpha_{i_1 \dots i_k}} \dots \\ \frac{\partial R^2}{\partial x^1} \dots & \ddots \\ \vdots \\ \frac{\partial R^N}{\partial x^1} \dots & \frac{\partial R^N}{\partial u^\alpha_{i_1 \dots i_k}} \dots \end{pmatrix}$$

má hodnost N na nadploše $R^\sigma = 0$.

Pokud pro všechny inf. op. r-par. LGT na prostoru (x, u) a jejich k-té rozšíření platí

$$X^{(k)} R^\sigma(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)\Big|_{R^\sigma = 0} = 0 \qquad (*)$$

pak je tato LGT grupou bodových symetrií systému $R^\sigma = 0$.

Pozn: Podmínka max. hodnosti vylučuje případy „nešťastného" zápisu systému PDR, kdy může být podmínka $(*)$ splněna identicky pro lib. inf. op. X, např. pokud bychom rovnici LHO zapsali jako $R = (m\ddot{x} + kx)^2 = 0$, pak pro lib. X by bylo

$$X^{(2)} (m\ddot{x} + kx)^2 \Big|_{m\ddot{x} = -kx} = 2(m\ddot{x} + kx) X^{(2)}(m\ddot{x} + kx)\Big|_{m\ddot{x} = -kx} = 0$$

což není, co bychom očekávali.

Zde totiž $$J = \left(\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial R}{\partial \ddot{x}} \right)\Big|_{R=0} = (0, 0, 0, 0)$$

oproti rovnici $m\ddot{x} + kx = 0$, kdy

$$J = (0, k, 0, m)$$

Důkaz: založený na přechodu k tzv. normálním souřadnicím (kanonickým) v nichž X má jednoduchý tvar $X = \frac{\partial}{\partial s}$ (translace) a tedy R^σ nezávisí na této souřadnici s a je tedy invariantní při jednopar. podgrupě generované X. Toto můžeme provést pro všechny jednopar. podgrupy a rozšířit na celou lokální LGT.

O normálních (kanon.) souřadnicích si povíme později, až budeme využívat symetrií k řešení diferenciálních rovnic.

Infinitezimální kritérium – využití

1) Přímé ověření, že jistá bodová transformace generovaná inf. op. X patří do grupy symetrie daného systému

2) Inf. kritérium s obecným X dává jisté podmínky na $\xi^i(x,u)$ a $\eta^\alpha(x,u)$, které často vedou na systém lineárních PDR, které mají jednoduché (mnohdy polynomiální) řešení $\Rightarrow$ nalezení bodových symetrií algoritmicky

3) Inf. kritérium dává též podmínky na $R^\sigma = 0$, pokud máme zadanou grupu symetrie a její inf. operátory. Zvlášť omezíme-li se na jistý řád a typ difer. rovnice (např. požadujeme linearitu), může být taková dif. rovnice pro určitou grupu už určena jednoznačně (až na konstanty) $\Rightarrow$ nalezení difer. rovnic (obecněji invariantů) zadané symetrie

4) Znalost bod. symetrií nám později umožní příslušné dif. rovnice zjednodušit, či přímo vyřešit. U PDR obvykle budeme hledat partikulární řešení.

5) A konečně později si odvodíme inf. kritérium tzv. variační (obecněji Noetherovské) symetrie a využijeme bodové transformace k nalezení zákonů zachování.