Obecná transformace funkcí při bodových transformacích

- uvažujme vektorovou funkci $u(x) = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^m(x))$ závislou na nezávislých proměnných $x = (x^1, \dots, x^n)$
- nechť
$$\begin{aligned}\tilde{x} &= F(x,u)\\ \tilde{u} &= G(x,u)\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u})\\ \tilde{u} &= G^{-1}(\tilde{x},\tilde{u})\end{aligned}$$

je lib. bodová transformace a k ní inverzní transformace

(pozn.: F^{-1} je jen označení inv. transf., ne matem. operace)

pak se $u = \Theta(x)$ transformuje do nových proměnných $(\tilde{x},\tilde{u})$

pomocí $\quad \tilde{u} = G(x, \Theta(x)) = G\left(F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}), \Theta(F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}))\right)$

což je implicitní vyjádření nové funkce $\tilde{u} = \tilde{\Theta}(\tilde{x})$.

- protože obvykle budeme pracovat s Lieovými grupami transformací závislými na parametrech ε a inverzní transf. pak budou dány pomocí sady parametrů ε^{-1} a stejnými funkcemi F a G, tj. $F^{-1}(\tilde{x},\tilde{u}) = F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1})$, budeme v tomto případě psát
$$\begin{aligned}\tilde{x} &= F(x,u,\varepsilon)\\ \tilde{u} &= G(x,u,\varepsilon)\end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1})\\ u &= G(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1})\end{aligned}$$

a máme $\quad \boxed{\tilde{u} = G\left(F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1}), \Theta(F(\tilde{x},\tilde{u},\varepsilon^{-1})), \varepsilon\right)}$

Př. pro lin. harm. oscilátor jsme měli 2-par. grupu

$F(t,x,t_0,A) = \tilde{t} = t + t_0 \quad \leftarrow$ nezávislá proměnná (výše x) $\qquad \varepsilon = (t_0, A)$

$G(t,x,t_0,A) = \tilde{x} = Ax \quad \leftarrow$ závislá proměnná (výše u) $\qquad \varepsilon^{-1} = (-t_0, \frac{1}{A})$

a obecné řešení $x = f(t)$ se transformuje na
$$\tilde{x} = Af(t) = Af(\tilde{t} - t_0) = \tilde{f}(\tilde{t})$$

což, jak bylo uvedeno výše, je opět řešení pro lin. harm. osc.

Př. později si ukážeme, že rovnice vedení tepla $u_{xx} = u_t$ je invariantní při transf. (1-par. LGT) $\quad$ (zde $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$)
$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + 2t\varepsilon\\ \tilde{t} &= t\\ \tilde{u} &= u\, e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2}\end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tilde{x} - 2\tilde{t}\varepsilon\\ t &= \tilde{t}\\ u &= \tilde{u}\, e^{\tilde{x}\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2}\end{aligned}$$

při této transformaci se lib. řešení $u = \theta(x,t)$ transformuje na nové řešení rovnice vedení tepla dané vztahem

$$\tilde{u} = \theta(x,t)\, e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} =$$
$$= \theta(\tilde{x} - 2\tilde{t}\varepsilon, \tilde{t})\, e^{-(\tilde{x}-2\tilde{t}\varepsilon)\varepsilon - \tilde{t}\varepsilon^2} =$$
$$= \theta(\tilde{x} - 2\tilde{t}\varepsilon, \tilde{t})\, e^{-\tilde{x}\varepsilon + \tilde{t}\varepsilon^2}$$

např. volbou $\theta(x,t) = A = \text{konst}$, což je určitě řešení rce vedení tepla dostaneme nové netriviální řešení (po odvlnkování)

$$u(x,t) = A\, e^{-x\varepsilon + t\varepsilon^2}$$

což si můžete ověřit přímým dosazením do $u_{xx} = u_t$.

Obecné transformace derivací při bodových transformacích

- pokud chceme určitý systém PDR (N je počet rovnic)

$$R^\sigma(x, u, \partial u, \dots \partial^k u) = 0 \quad , \quad \sigma = 1, \dots, N,$$

kde opět $x = (x^1, \dots, x^n)$ jsou nezávislé proměnné
$u = (u^1, \dots, u^m)$ jsou závislé proměnné
a $\partial u, \dots, \partial^k u$ značí všechny první, ..., k-té derivace všech u podle všech x, tj. $\frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}, \dots, \frac{\partial^k u^\mu}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$

převést do nových proměnných pomocí bodové transformace

$$\tilde{x}^i = F^i(x,u) \quad , \quad \tilde{u}^\mu = G^\mu(x,u), \qquad (*)$$

musíme nejprve vědět, jak tuto transformaci rozšířit (prodloužit) do prostoru derivací, tj. najít výrazy

$$\frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \tilde{u}^\mu_i = H^\mu_i(x, u, \partial u)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial^k \tilde{u}^\mu}{\partial \tilde{x}^{i_1} \dots \partial \tilde{x}^{i_p}} \equiv \tilde{u}^\mu_{i_1 \dots i_p} = H^\mu_{i_1 \dots i_p}(x, u, \partial u, \dots, \partial^p u)$$

- to lze provést porovnáním úplných diferenciálů $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})$ a transformačních vztahů $(*)$

k zápisu těchto diferenciálů použijeme operátor úplné derivace podle x^i

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_\mu u^\mu_i \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \sum_{\mu, j} u^\mu_{ij} \frac{\partial}{\partial u^\mu_j} + \dots$$

který „prodериvovává" podle x^i včetně závislosti na závislých proměnných.

- pomocí tohoto operátoru můžeme psát

$$d\tilde{u}^{\mu} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{j}} d\tilde{x}^{j} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{u}^{\mu}_{j} d\tilde{x}^{j} \quad \leftarrow \text{diferenciál } \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})$$

$$d\tilde{u}^{\mu} = \sum_{k=1}^{n} (D_k G^{\mu})\, dx^{k} \quad \leftarrow \text{diferenciál } \tilde{u} = G(x,u)$$

$$d\tilde{x}^{j} = \sum_{k=1}^{n} (D_k F^{j})\, dx^{k} \quad \leftarrow \text{diferenciál } \tilde{x} = F(x,u)$$

dosazení za $d\tilde{x}^j$ do první rovnice a porovnání s druhou (rovnost musí platit pro lib. dx^k) nakonec dostaneme soustavu rovnic $\boxed{\sum_{j=1}^{n} (D_k F^j)\, \tilde{u}^{\mu}_{j} = D_k G^{\mu}}$ pro $k = 1, \dots, n$

pro neznámé derivace $\tilde{u}^{\mu}_{j}$. Řešení lze vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{\mu}_{1} \\ \vdots \\ \tilde{u}^{\mu}_{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{\mu}_{1}(x,u,\partial u) \\ \vdots \\ H^{\mu}_{n}(x,u,\partial u) \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 G^{\mu} \\ \vdots \\ D_n G^{\mu} \end{pmatrix}, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} D_1 F^1 & \dots & D_1 F^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n F^1 & \dots & D_n F^n \end{pmatrix}$$

- máme-li první derivace, můžeme obdobně počítat druhé, a z nich pak rekurzivně vyšší derivace s tím, že v každém kroku použijeme místo diferenciálu fce $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x})$, diferenciály derivací, např. $d\tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p j}\, d\tilde{x}^{j}$

  a místo diferenciálů fce $\tilde{u} = G(x,u)$ diferenciály funkcí $H^{\mu}_{i}, \dots, H^{\mu}_{i_1 \dots i_p}$, tj. $d\tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p} = \sum_{k=1}^{n} (D_k H^{\mu}_{i_1 \dots i_p})\, dx^{k}$

- opět dostaneme soustavu n lineárních rovnic

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} (D_k F^j)\, \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p j} = D_k H^{\mu}_{i_1 \dots i_p}}$$

jejíž řešení je

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p 1} \\ \vdots \\ \tilde{u}^{\mu}_{i_1 \dots i_p n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{\mu}_{i_1 \dots i_p 1} \\ \vdots \\ H^{\mu}_{i_1 \dots i_p n} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_1 H^{\mu}_{i_1 \dots i_p} \\ \vdots \\ D_n H^{\mu}_{i_1 \dots i_p} \end{pmatrix}, \text{ kde } A \text{ je stejná jako výše}$$

- pro efektivní převedení jistých rovnic do nových souřadnic $(\tilde{x}, \tilde{u})$ je vhodné hledat přímo inverzní transformace, tj. $u^{\mu}_{i} = \overset{-1}{H}{}^{\mu}_{i}(\tilde{x}, \tilde{u}, \partial\tilde{u})$ atd. i když u Lieových grup jsou opět dány pomocí H^{μ}_{i} s parametry ε^{-1}.

Př.: Mějme ODR $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$. Ukažme, že je invariantní při rotaci prostoru (x,y), tj. při transformacích

$$\tilde x = x\cos\varphi - y\sin\varphi = F(x,y,\varepsilon)$$
$$\tilde y = x\sin\varphi + y\cos\varphi = G(x,y,\varepsilon)$$

tj. $x^1 = x$, $u^1 = y$

pro inverzní transf. dostaneme ($\varphi \to -\varphi$)

$$x = \tilde x\cos\varphi + \tilde y\sin\varphi = F(\tilde x,\tilde y,-\varphi)$$
$$y = -\tilde x\sin\varphi + \tilde y\cos\varphi = G(\tilde x,\tilde y,-\varphi)$$

odtud

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D_{\tilde x}G}{D_{\tilde x}F} = \frac{-\sin\varphi + \frac{d\tilde y}{d\tilde x}\cos\varphi}{\cos\varphi + \frac{d\tilde y}{d\tilde x}\sin\varphi}$$

a dosazení do $0 = (x-y)\frac{dy}{dx} - (x+y) = \dots = (\tilde x - \tilde y)\frac{d\tilde y}{d\tilde x} - (\tilde x + \tilde y)$

$$0 = \left[(\tilde x - \tilde y)\cos\varphi + (\tilde y + \tilde x)\sin\varphi\right]\frac{\left(-\sin\varphi + \frac{d\tilde y}{d\tilde x}\cos\varphi\right)}{\cos\varphi + \frac{d\tilde y}{d\tilde x}\sin\varphi} - (\tilde x + \tilde y)\cos\varphi + (\tilde x - \tilde y)\sin\varphi$$

$$0 = (\tilde x + \tilde y)\overbrace{(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}^{-1} + (\tilde x - \tilde y)(\cancel{-\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}) + \frac{d\tilde y}{d\tilde x}\left[\cancel{(\tilde x + \tilde y)(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)} + (\tilde x - \tilde y)\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}\right] = (\tilde x - \tilde y)\frac{d\tilde y}{d\tilde x} - (\tilde x + \tilde y)$$

Př. Ukažme, že rce vedení tepla $u_{xx} = u_t$ je inv. při transf.

$$\tilde x = 2t\varepsilon + x = F^x$$
$$\tilde t = t = F^t$$
$$\tilde u = u\, e^{-x\varepsilon - t\varepsilon^2} = G$$

inverzní tr. je

$$x = \tilde x - 2\varepsilon\tilde t$$
$$t = \tilde t$$
$$u = \tilde u\, e^{\tilde x\varepsilon - \tilde t\varepsilon^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} D_{\tilde x}F^x & D_{\tilde x}F^t \\ D_{\tilde t}F^x & D_{\tilde t}F^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

odtud

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x(\tilde x, \tilde t, \tilde u, \tilde u_{\tilde x}, \tilde u_{\tilde t}) \\ H_t(\text{— " —}) \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} D_{\tilde x}G \\ D_{\tilde t}G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon\tilde u + \tilde u_{\tilde x}] \\ e^{\cdots}[-\varepsilon^2\tilde u + \tilde u_{\tilde t}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon\tilde u + \tilde u_{\tilde x}] \\ e^{\cdots}[+2\varepsilon^2\tilde u + 2\varepsilon\tilde u_{\tilde x} - \varepsilon^2\tilde u + \tilde u_{\tilde t}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon\tilde u + \tilde u_{\tilde x}] \\ e^{\cdots}[\varepsilon^2\tilde u + 2\varepsilon\tilde u_{\tilde x} + \tilde u_{\tilde t}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xt} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} D_{\tilde x}H_x \\ D_{\tilde t}H_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +2\varepsilon & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\cdots}[\varepsilon^2\tilde u + \varepsilon\tilde u_{\tilde x} + \varepsilon\tilde u_{\tilde x} + \tilde u_{\tilde x\tilde x}] \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$u_{xx} = e^{\cdots}[\cancel{\varepsilon^2\tilde u} + \cancel{2\varepsilon\tilde u_{\tilde x}} + \tilde u_{\tilde x\tilde x}] = e^{\cdots}[\cancel{\varepsilon^2\tilde u} + \cancel{2\varepsilon\tilde u_{\tilde x}} + \tilde u_{\tilde t}] = u_t$$

a tedy z $u_{xx} = u_t$ plyne

$$\tilde u_{\tilde x\tilde x} = \tilde u_{\tilde t}$$

Plyne z obecného tvrzení, že $(1+B)^{-1} = (1-B)$ pokud $B^2 = 0$

neboť $(1+B)(1-B) = 1 - B^2 = 1$

zde $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Př. LHO $\ddot x + \omega^2 x = 0$ $\quad \tilde t = t + \beta$, $\tilde x = \alpha x$

$F \Rightarrow t = \tilde t - \beta$, $x = \frac{1}{\alpha}\tilde x = G$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{D_{\tilde t}G}{D_{\tilde t}F} = \frac{\frac{1}{\alpha}\frac{d\tilde x}{d\tilde t}}{1}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{d^2\tilde x}{d\tilde t^2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{d^2\tilde x}{d\tilde t^2} + \omega^2\frac{\tilde x}{\alpha} = 0 = \ddot{\tilde x} + \omega^2\tilde x$$