Příklady ve fyzice

- Okamžitá rychlost (derivace)
- Volný pád (integrace)
- Homogenní pole (dva nekonečně vzdálené náboje)
- Homogenní grav. pole a slapové síly
- Potenciál nekonečného drátu
- Baterie jako kondenzátor nekonečné kapacity
- STR a klasická limita (současnost, energie)
- Renormalizace v klasické teorii bodové částice
- Renormalizace v kvantové teorii pole

Okamžitá rychlost (derivace)

průměrná rychlost

$$\bar{V} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ dráha Δs za čas Δt

okamžitá rychlost

dt menší než jakékoli relevantní časy

$$V \doteq \frac{ds}{dt}$$ dráha ds za čas dt

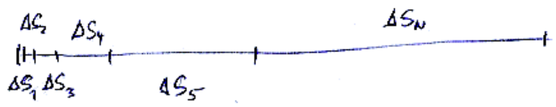
pokud $\frac{ds_1}{dt_1} = \frac{ds_2}{dt_2}$, jinak neexistuje

Volný pád (integrace)

a = konstanta — zrychlení

$v = at$ — rychlost

$$s = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta s_k$$



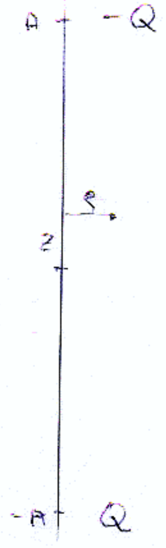
$$\Delta t = \frac{t}{N}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} v_k \Delta t = \sum_{k=0}^{N-1} a t_k \Delta t = \sum_{k=0}^{N-1} a k \Delta t^2 =$$

$$= \frac{a t^2}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{1}{2} a t^2 \frac{N(N-1)}{N^2} = \frac{1}{2} a t^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \doteq \frac{1}{2} a t^2$$

Homogenní pole

Potenciál dvou velkých, velmi vzdálených náb.

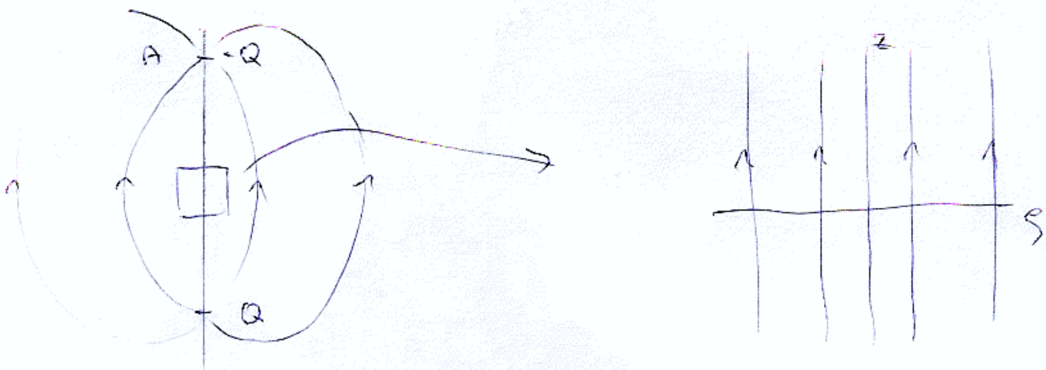


$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{\sqrt{\rho^2+(A-z)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{\rho^2+(A+z)^2}}$$

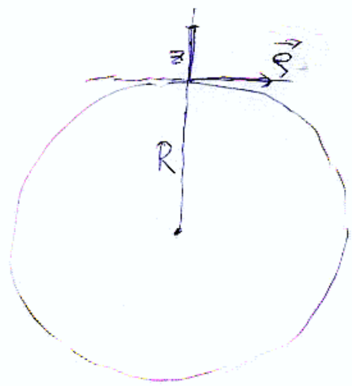
$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{A}\left(\left(1-2\frac{z}{A}+\frac{\rho^2+z^2}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+2\frac{z}{A}+\frac{\rho^2+z^2}{A^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\approx -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{A^2} z = -E z \qquad \left(\text{chyba } O\left(\frac{z^3}{A^3}\right)\right)$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{A^2}$$



Homogenní gravitační pole a slapové síly



Newtonův gravitační zákon

$$\vec g = -G\frac{M}{r^2}\vec e$$

Pole blízko povrchu země

R - poloměr země

z, ϱ typické rozměry $z, \varrho < R$

$$r^2 = (R+z)^2 + \varrho^2 = R^2\left(1 + 2\frac{z}{R} + \frac{z^2+\varrho^2}{R^2}\right)$$

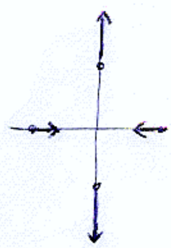
$$r = R\left(1 + \frac{z}{R} + O\left(\frac{z^2}{R^2}\right)\right)$$

$$\frac{\vec e}{r^2} = \frac{R+z}{r^3}\vec e_z + \frac{\vec\varrho}{r^3} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{R+z}{R}\left(1+\frac{z}{R}+\dots\right)^{-3}\vec e_z + \frac{\vec\varrho}{R}\left(1+\frac{z}{R}+\dots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{R^2}\left(\vec e_z - \frac{2z}{R}\vec e_z + \frac{\vec\varrho}{R} + O\left(\frac{z^2}{R^2}\right)\right)$$

$$\vec g = -g\vec e_z + g\left(2z\vec e_z - \vec\varrho\right)\frac{1}{R} + g\,O\left(\frac{z^2}{R^2}\right)$$

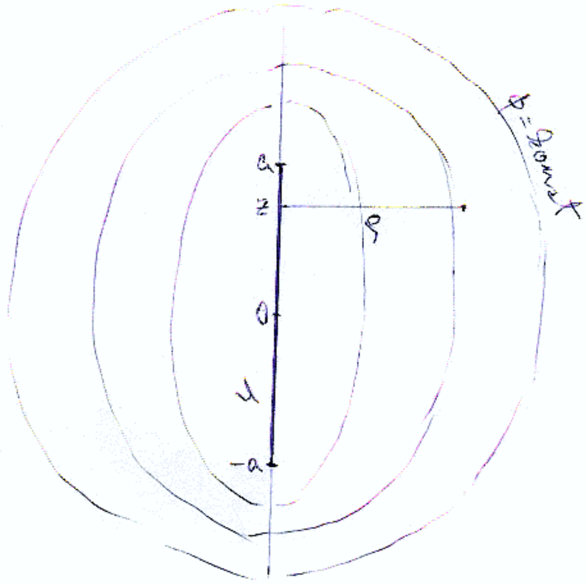
$$g = G\frac{M}{R^2}$$



$$\vec g_{Hom} = -g\vec e_z \doteq \vec g$$

$$\vec g_{slapové} = \vec g - \vec g_{hom} \doteq g\left(2z\vec e_z - \vec\varrho\right)\frac{1}{R}$$

Potenciál nekonečného nabitého drátu



Konečný drát:

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{z+a+\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}}$$

Nekonečný drát

$$\phi \xrightarrow{a\to\infty} \infty \qquad ???$$

Nekonečný drát délky a

typická škála ϱ_0

délka drátu $a \gg \varrho_0$, tj. $\frac{a}{\varrho_0} \in$ IHI

$$\frac{z+a+\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}} = \frac{2a\left(1+O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)\right)}{\cancel{z-a}+a\left(\cancel{1-\frac{z}{a}}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{a^2}+\frac{1}{2}\frac{z^2+\varrho^2}{a^2}+O\left(\frac{\varrho_0^4}{a^4}\right)\right)}$$

$$= \frac{2a\left(1+O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)\right)}{\frac{\varrho^2}{2a}\left(1+O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)\right)} = \frac{4a^2}{\varrho^2}\left(1+O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)\right) \approx \frac{4a^2}{\varrho^2}$$

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{4a^2}{\varrho^2}\left(1+O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{4a^2}{\varrho_0^2} - \ln\frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} + \ln\left(1+O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)\right)\right)$$

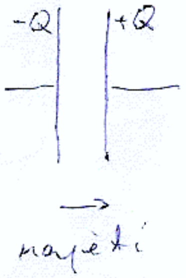
$$= K - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\varrho}{\varrho_0} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} O\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)$$

$$\phi_0 = \phi - K \doteq -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\varrho}{\varrho_0}$$

Baterie jako kondenzátor nekonečné kapacity

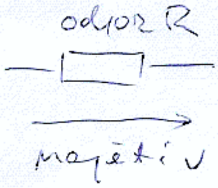
kondenzátor

$$Q = C V$$



kapacita V

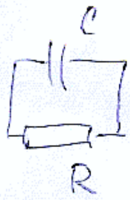
odpor



proud I

$$V = R I$$

vybíjení kondenzátoru



$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$I = \frac{1}{R} V$$

$\Downarrow$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{CR} V = -\frac{1}{\tau} V \qquad \tau = CR$$

$\Downarrow$

$$V = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad Q = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

nekonečná kapacita

- $C \gg 1 \quad R \sim 1 \Rightarrow \tau \gg 1$
  - $t \sim 1 \Rightarrow \frac{t}{\tau} \doteq 0 \qquad \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \doteq 1$

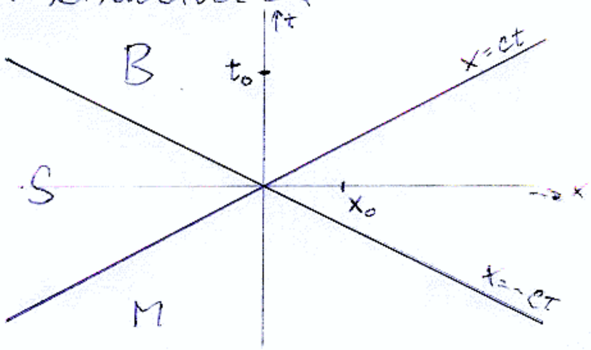
    $\Downarrow$

    $V \doteq V_0$
  - $t \sim \tau \Rightarrow \frac{t}{\tau} \sim 1$

    $V = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
- $C \gg 1 \quad R \ll 1 \quad t \sim 1$
  - $\tau \sim 1 \rightarrow V = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$
  - $\tau \ll 1 \rightarrow V \doteq 0$

STR a klasické limity

Kauzální struktura



Typické škály

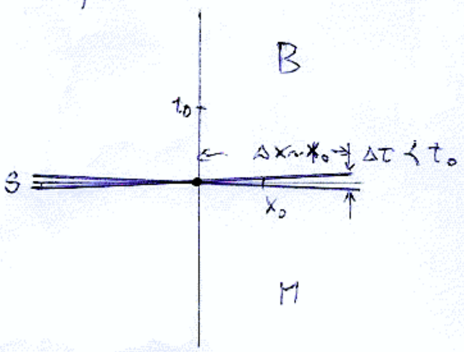
čas t_0 (1s)

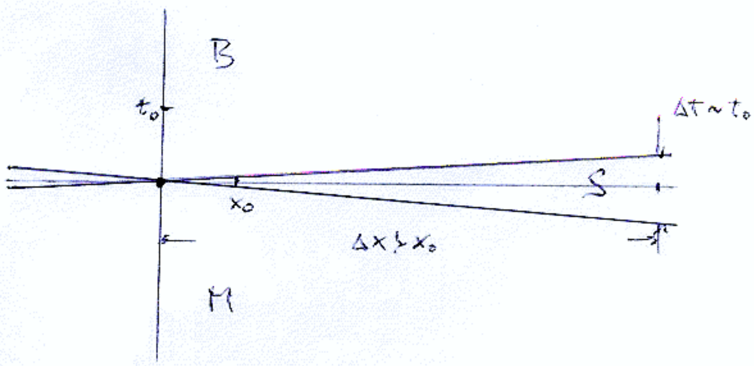
prostor x_0 (1m)

rychlost v_0 (1m s⁻¹)

Klasická limita

rychlost světla $c \gg v_0$





Energie

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right)$$

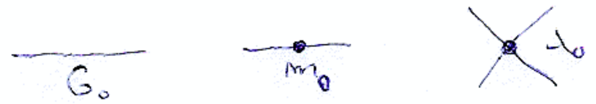
$$m = \frac{E}{c^2} \doteq m_0$$

$$E_K = E - m_0 c^2 \doteq \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Renormalizace v KTP

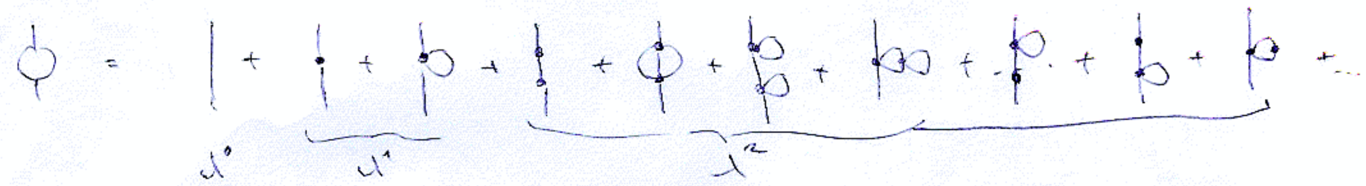
ϕ^4 - teorie

$$S = -\int \left(\frac{1}{2}\nabla\phi\,\nabla\phi + \frac{1}{2} m_0\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda_0\phi^4\right) g^{\frac{1}{2}}$$



QED

Greenovy fce



měřitelné veličiny

hmotnost, účinný průřez, ...

$m_0, \lambda_0 \rightarrow$ Green. fce $\rightarrow$ měř. veličiny m, σ

$m_0\ \lambda_0$ konečné $\longrightarrow$ $m\ \sigma$ nekonečné

m_0, λ_0 nekonečné $\longrightarrow$ m, σ konečné