

Květ slunečnice a Fibonacciho čísla

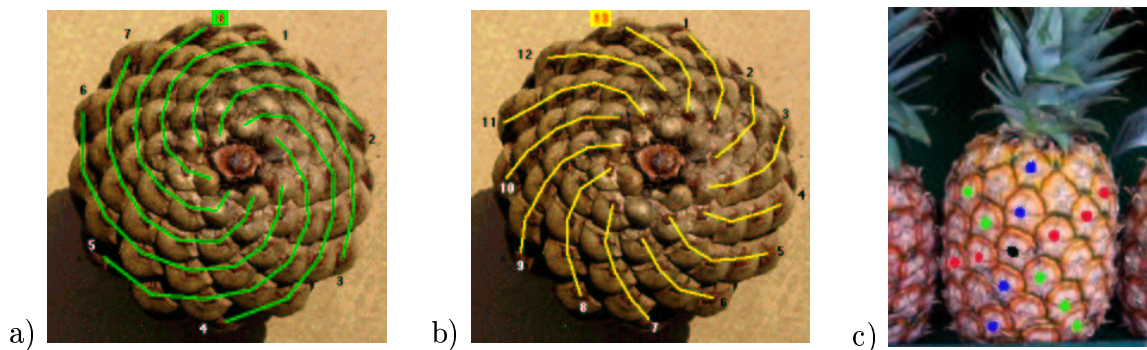
Název prozrazuje, že v tomto článku se budeme zabývat tématem, které náleží jak do botaniky, tak matematiky a, jak uvidíme, také fyziky. Dopředu můžeme prozradit, že Fibonacci sám by odpověď na otázku, co má společného se slunečnicí, nevěděl. Může se zdát bláznivé zeptat se: A věděla by odpověď sama slunečnice? Jinými slovy: Kdybychom si v její genetické informaci mohli listovat jako v knize, bylo by možné tam odpověď najít? Ke konci článku uvidíme, že taková otázka není bláznivá, ale naopak docela zásadní. Nicméně nyní už se vrhněme na popis toho, o čem bude řeč.



Obrázek 1: Květ slunečnice s 55 spirálami po a 89 proti směru hodinových ručiček.

Co je to fylotaxe?

Jelikož článek je napsán fyzikem, není s podivem, že začne pozorováním. Podívejme se na květ (přesněji květní úbor) slunečnice, na šišku či ananas. Pokud nejste právě na poli, v lese či obchodě se zeleninou, pomohou vám obrázky 1, a 2. Na každé z těchto tří rostlin můžeme pozorovat pravidelné uspořádání semen či šupin. Všimneme si, že sousedící šupiny tvoří spirály (naznačeny na obrázcích), botanikové je nazývají *parasticha*. Tyto spirály můžeme pozorovat jak po tak proti směru hodinových ručiček. Na šišce na obrázku 2 je jejich počet 8 po a 13 proti



Obrázek 2: Borová šiška s a) 8 spirálami po, b) 13 proti směru hodinových ručiček. c) Na plodu ananasu můžeme pozorovat 21 modrých, 13 zelených a 8 červených spirál.

směru hodinových ručiček. Na květu slunečnice na obr.1 to je 55 a 89. Čtenáři v lese či jinde, nepoužívající obrázky, kolem sebe mohou najít také šišky s 5 a 8 spirálami nebo slunečnice s 34 a 55 či dokonce 89 a 144. U ananasu na obr.2c můžeme pozorovat více než dva druhy spirál, na obrázku jsou naznačeny druhy tři, přičemž modrých bychom napočítali 21, zelených 13 a červených 8.

Ti, kteří mají nějaké zkušenosti s matematikou, již zřejmě zpozorovali, že všechna uvedená čísla jsou členy tzv. *Fibonacciho posloupnosti*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 21, 34, 55, 89, 144, . . . , kde daný člen je vždy součtem předchozích dvou. Matematik *Leonardo Fibonacci z Pisy* žil v letech 1175–1240. Ve své knize *Liber Abaci* se zabýval dnes proslaveným problémem růstu populace králíků: *Na pole umístíme pár králíků. Jestliže králíci po měsíci dospějí a zplodí každý měsíc nový pár - kolik párů králíků se narodí za dvanáct měsíců?* Řešením je právě po autorovi pojmenovaná posloupnost.

Dále si všimněme, že počet spirál jdoucích po a proti směru hodinových ručiček jsou vždy dvě po sobě jdoucí (!) Fibonacciho čísla. Podrobnějším pozorováním bychom zjistili, že na dvou rostlinách stejného druhu se spirály o daném počtu mohou točit po i proti směru hodinových ručiček. Popsanému jevu se odborně říká *fylofaxe* (z řeckého *phyllon*, list a *taxis*, uspořádání) a lze ho pozorovat na různých květenstvích, nejen slunečnicovém, také na některých plodech a na uspořádání listů rostlin (při pohledu shora na stonk by špičky listů tvořily vzory podobné těm právě uvedeným).

Historie zkoumání fylofaxe sahá daleko. Zmínky je možné najít již v pramenech pocházejících z doby krátce před naším letopočtem. Nicméně prvního výraznějšího pokroku bylo dosaženo až po roce 1830 díky pracím německých botaniků *Karla Schimpera* a *Alexandera Brauna*. Karl Schimper zkoumal uspořádání lístků na stonku a jako první poukázal na souvislost s Fibonacciho čísly. Alexander Braun studoval uspořádání šupin na šiškách, popsal spirály jdoucí po a proti směru hodinových ručiček a jejich počty. Pozoroval, že nově vyrostlá šupina se vzdaluje rovně ze středu šišky a další vyrostle odkloněna vždy o stejný úhel, divergenci, α . Měřeními došel k závěru, že celý úhel (360°) je k divergenci α v poměru *zlatého řezu* $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Zlatým řezem byli lidé fascinováni od dob, kdy se naučili počítat se zlomky. Kupříkladu Pythagorejci podotýkali na spojitost pentagramu se zlatým řezem, viz obrázek 3. Také v dílech renesančních malířů se toto číslo dá velmi často vystopovat.



Obrázek 3: Zlatý řez schovaný v pentagramu $\tau = \frac{\text{červená}}{\text{modrá}} = \frac{\text{modrá}}{\text{zelená}} = \frac{\text{zelená}}{\text{purpurová}}$.

Chování nejjednoduššího modelu

Pro lepší pochopení celého problému si nyní uveďme jednoduchý model a zkoumejme, zda popíše pozorované chování.

Představme si kruhový květ. Semínka vyrůstají z prostředka v pravidelných časových intervalech. Každé semínko, po tom co vyrostlo, se od středu začne vzdalovat rychlostí úměrnou odmocnině z času (aby se zachovávala plošná hustota semínek). Následující semínko se vydá ve směru odkloněném o úhel $\alpha = r \times 360^\circ$ od předchozího.

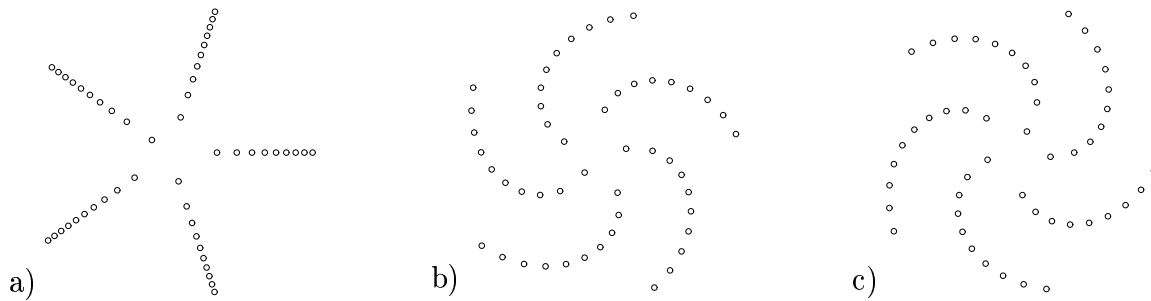
Pravdou je, že jsme neuvedli žádný důvod, proč právě podle tohoto modelu by se příroda měla chovat. To je ovšem případ při práci fyzika vcelku častý. Pro klid matematických duší poznamenejme, že není článku konec. Prozatím je naším úkolem pochopit, proč poměr r má být zlatý řez. Vodítkem při vylučování jednotlivých možností bude fakt, že chceme, aby květ byl dobře zaplněn, tj. aby mezi semínky nebyly zbytečné mezery.

Na následujících obrázcích 4–6 jsou výsledky simulace tohoto modelu. Z obrázku 4a) pochopíme, že zvolit odklon r jako racionální číslo s malým jmenovatelem $r = p/q$ není vhodné, protože pak bychom pozorovali semínka rostoucí v q rovných větvích. Je-li r blízké nějakému racionálnímu číslu s malým jmenovatelem, pozorujeme q spirál, to je znázorněno na obrázcích 4b) a 4c). Směr spirály závisí na tom, zda je číslo větší či menší než zlomek jemu blízký.

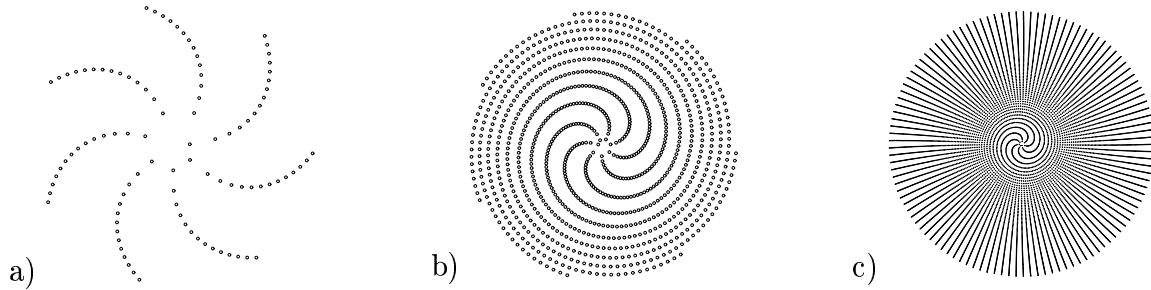
Poznamenejme, co by se stalo, kdybychom v případech b) a c) nechali narůst tisíce semínek. Původních 5 spirál by zaniklo, jelikož semínka tvořící jednu z nich by se dostala příliš daleko od sebe a tedy spirála by již nebyla oku patrná. Pozorovali bychom na okraji 200 rovných větví, neboť $0.605 = 121/200$.

Napadne nás použít nějaké iracionální číslo r . Kupříkladu Ludolfovo číslo $r = \pi$. Uspořádání semínek pak závisí na tom, kolik jsme jich nechali narůst. Pro 100 semínek, obrázek 5a), pozorujeme 7 spirál proti směru hodinových ručiček. Při 1000 semínkách, obrázek 5b), začne obrazec na okraji vypadat tak, jak chceme, tedy mezi semínky nejsou zbytečné mezery. Ovšem necháme-li narůst semínek 10 000, obrázek 5c), pozorujeme 113 větví a nechtěné mezery mezi semínky jsou opět uprostřed květu i na okrajích.

Vysvětlení je jednoduché. Nejlepší malé racionální aproximace pro π jsou $3, \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \dots$. Jak jsme na to přišli? Číslo π stejně jako každé jiné lze jednoznačně zapsat ve tvaru tzv. řetězového



Obrázek 4: Chování modelu pro a) $r = 0.6 = \frac{3}{5}$, pozorujeme 5 větví, b) $r = 0.605$, vidíme 5 spirál po směru hodinových ručiček, neboť $0.605 > \frac{3}{5}$, c) $r = 0.595$, vidíme 5 spirál proti směru hodinových ručiček, neboť $0.595 < \frac{3}{5}$.



Obrázek 5: Simulace pro $r = \pi$ pro a) 100, b) 1000, c) 10 000 semínek.

zlomku. Pro π konkrétně

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}}$$

Řetězový zlomek libovolného čísla z má tvar

$$z = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

kde a_0 je celá část ze z , označíme-li desetinou část b_0 , můžeme vypočítat a_1 jako celou část z převrácené hodnoty b_0 a tak rekurzivně dále.

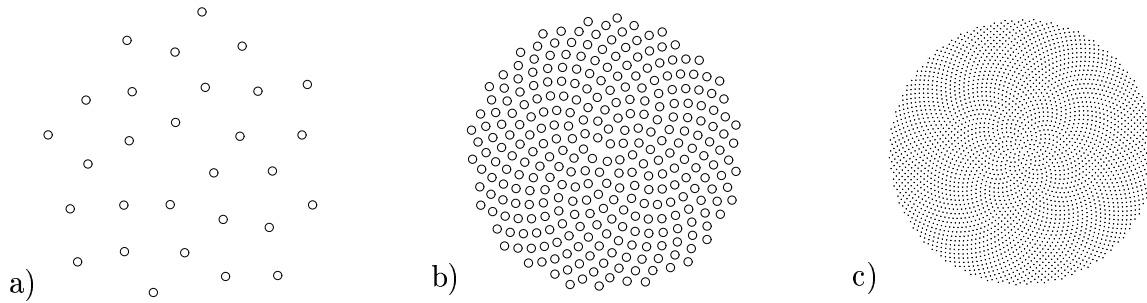
Useknutím řetězového zlomku pak lze získat racionální aproximace daného čísla. Usekneme-li zlomek před jednotkou, např. $\pi \approx 3 + 1/(7 + 1/15) = 333/106$, není aproximace příliš dobrá, stačí nepatrně zvýšit jmenovatel na $\frac{355}{113}$ (vzít o jedno delší úsek řetězového zlomku) a k číslu π se přiblížíme mnohem více.

Z toho, co jsme řekli, vyplývá, že vhodným kandidátem pro poměr r bude takové iracionální číslo, které nemá dobré racionální aproximace, tedy jeho rozvoj do řetězového zlomku obsahuje samé jedničky

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

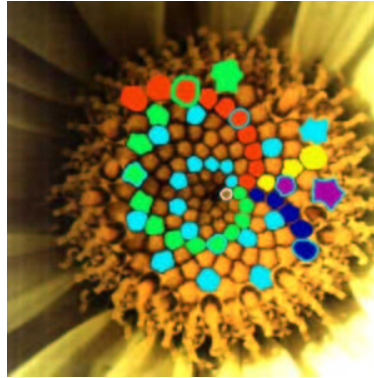
Tedy právě Braunem naměřený zlatý řez! Jeho racionální aproximace jsou $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \dots$. Protože počty spirál odpovídají jmenovatelům, vidíme nyní i souvislost s Fibonacciho čísly.

Na obrázku 6 jsou znázorněny výsledky simulace pro úhel odklonu odpovídající zlatému řezu pro různé počty vyrostlých semínek. Pro 30 semínek pozorujeme 8 a 13 spirál, pro 300 jich je 21 a 34, pro 3000 semínek je spirál 89 a 144.



Obrázek 6: Simulace pro $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pro a) 30, b) 300, c) 3000 semínek.

Kterému Fibonacciho číslu odpovídající spirály pozorujeme konkrétně, je dáno pouze velikostí květu. Viditelné spirály jsou tvořené semínky, které spolu sousedí a to se mění se vzdáleností od středu květu. V praxi jsou nejlépe zřetelné spirály na okraji. Představivosti pomůže obrázek 7.



Obrázek 7: Nejlépe jsou vidět spirály tvořené dotýkajícími se semínky.

Nejčastěji pozorujeme dva různé druhy spirál, jelikož semínko má většinou čtyři sousedy (u slunečnice či šišek), někdy šest sousedů (u ananasu, kde jsme také viděli tři druhy spirál). Navíc racionální aproximace zlatého řezu splňují nerovnost

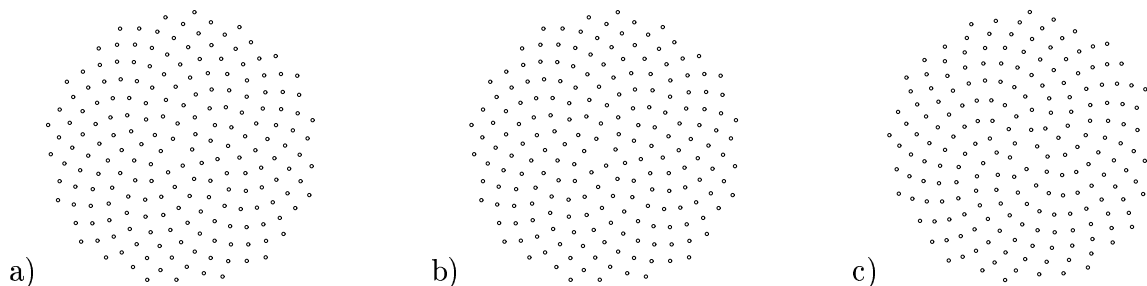
$$1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{21}{13}, \dots < \tau < 2, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \frac{34}{21}, \dots,$$

proto se spirály odpovídající dvěma po sobě jdoucím Fibonacciho číslům (jmenovatelům zlomků) točí v opačných směrech. Vzpomeňte si na vysvětlení směru spirál u obrázku 4b) a 4c) a porovnejte s nerovností.

Zlatý řez ovšem není jediný přípustný kandidát pro úhel odklonu. Další z čísel, která nemají dobré racionální aproximace, se dají napsat jako

$$z_1 = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad \text{nebo} \quad z_2 = \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad \text{nebo} \quad z_3 = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Číslo z_1 odpovídají počty spirál (jmenovatele aproximací) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, . . . , tzv. Lucasova posloupnost (Fibonacciho typu, s počátečními hodnotami 1, 3 namísto 1, 2). Pro z_2 jsou počty spirál 1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, Pro z_3 je 2, 5, 12, 29, 70, Na obrázku 8 je výsledek simulace pro 200 vyrostlých semínek. Vidíme, že vzory se od těch Fibonacciho na první pohled příliš neliší. V přírodě se vzory odpovídající divergenci z_1 i z_2 vyskytují, ovšem mnohem méně často než ty odpovídající zlatému řezu.



Obrázek 8: Vzor pro a) $r = z_1$ s 18 a 29 spirálami, b) $r = z_2$ s 23 a 37 spirálami, c) $r = z_3$ s 12 a 29 spirálami viditelnými na okraji.

Cesta k úplnému vysvětlení

Shrňme nyní, co jsme doposud uvedli. Na začátku jsme nastínili, co to je fylotaxe a inspirování pozorováními botanika Brauna jsme podrobně rozebrali chování jednoduchého modelu. Ovšem zároveň s tím nám na mysli vytanuly otázky: Je nějaký důvod, proč by se rostliny měly chovat podle našeho modelu? A podle jakého pravidla se vybere právě zlatý řez jako divergence a ne jiné číslo podobných vlastností. Než na tuto otázku odpovíme, vydejme se dále po cestě historie studia fylotaxe a pozastavme se na ní u několika zajímavých myšlenek.

Krátce po Schimperovi a Braunovi následovaly studie bratří *Louise a Augusta Bravaisových*. Ti popisovali fylotaxi pomocí mřížky na polokouli a rozebírali, které ze spirál jsou viditelné, podobně jako my na obrázku 7. Auguste Bravais se později, údajně inspirován fylotaxí, začal zabývat krystaly a stal se jedním ze zakladatelů oboru krystalografie.

V roce 1868 německý botanik *Hofmeister* ve své knize uvedl, že pouhý fakt, že nové semínko roste do směru, kde je nejvíce místa, by mohl být zodpovědný za pozorované vzory. *Simon Schwendener* v roce 1878 navrhl, že uspořádání je výsledkem tlaku, kterým semínka působí na své sousedy. Vyrobit mechanický stroj, který takové podmínky simuloval. Výsledky jeho měření byly překvapivě přesné. Zajímavý je také argument *Wiesnera* (1875) vedený v obdobném duchu, který říká, že listy na rostlině se uspořádávají tak, aby měly co nejlepší přístup ke světlu a co nejméně si stínily. Nicméně růst dlouhých úzkých listů by pro takový případ byl asi efektivnějším řešením než spirálové vzory. *Schouteho* (1913) napadlo, že počáteční směr růstu nového semínka by mohl být dán chemických inhibitory, který je vylučován semínky již vyrostlými. Ovšem do dnešní doby žádný takový chemický inhibitor nebyl nalezen.

V roce 1907 přišel holandský botanik *G. van Iterson* s teorií, která nyní tvoří základ moderního teoretického výzkumu fylotaxe. Zkonstruoval geometrický model, který předpokládal, že semínka jsou kolečka, ve vzájemném kontaktu, uspořádány kolem kruhového středu (ze kterého vyrůstají). Spočítal všechny geometricky možné konfigurace. Jednou z nich skutečně byl vzor pozorovaný na rostlinách odpovídající divergenci o velikosti zlatého řezu. Ale řešením bylo i

mnoho dalších vzorů, např. ty z obrázků 8a) a b). Všechna řešení se dají znázornit v tzv. Itersonově diagramu. Iterson nedokázal rozhodnout, proč to které řešení by mělo být lepší než jiné. Částečně možná proto zůstal jeho přístup více než 50 let zapomenut.

Rozhodující příspěvek k výzkumu přidali francouzští fyzici *Douady a Couder* v roce 1992. Namísto geometrických kritérií pro umístění nového semínka použili princip minimální energie. Nejlépe jejich přístup pochopíme, popíšeme-li si experiment, který zrealizovali. Do středu misky naplněné silikonovým olejem padaly periodicky kapičky fero-kapaliny. Kolem misky bylo magnetické pole umístěné tak, aby se jednotlivé kapičky vzájemně odpuzovaly (podobně jako dvě nabitě kuličky). Rychlost jejich pohybu byla limitována viskozitou oleje. Kapičky pohybující se od sebe tvořily vzory stejné jako pozorujeme na slunečnici. Douady a Couder také numericky simulovali popsany model. Došli k podobnému diagramu popisujícímu řešení jako Iterson, narozdíl od něj však dokázali vysvětlit, proč správným výsledkem je právě ten související s Fibonacciho čísly. Jejich vysvětlení je chybějícím článkem řetízku pochopení fylotaxe, je ovšem nad rámec složitosti tohoto článku. Lze se o něm dočíst mimo jiné v článku určeném pro širší vědeckou veřejnost [2].

Přínos výsledku Douadyho a Coudera je zejména ve vyvrácení evolučního přístupu k fylotaxi, tj. teorie související s otázkou uvedenou na začátku: Věděla by slunečnice sama, co má společného s Fibonacciho čísly? Část vědců se domnívala, že ano. Věřila totiž správnosti následujícího argumentu: Semínka na rostlinách podobných slunečnici v dávné a dávné historii jejich vývoje rostla náhodně, avšak rostliny, jejichž semínka byla blízko u sebe, byly přirozeným výběrem preferovány před ostatními, a proto dnes téměř na všech rostlinách pozorujeme vzory odpovídající Fibonacci číslům, jelikož ty jsou z hlediska šetření prostoru nejvýhodnější.

Z výsledku Douadyho, Coudera a později i dalších ovšem plyne, že spirálové vzory jsou výsledkem pouze dynamického růstového procesu "odpuzujících" se semínek, že tedy nejsou zakódovány v genech rostliny, ani nevznikaly nějakou složitou evoluční cestou. Přičemž ono odpuzování semínek může být realizováno kupříkladu pouhým dělením a růstem buněk mezi zárodky budoucích semínek.

Literatura

- [1] Adler I., Barabe D., Jean R.V., *A history of the Study of Phyllotaxis*. Annals of Botany **80**, 231-244 (1997).
- [2] Douady S., Couder Y., *La physique des spirales végétales*, La Recherche 250, Volume 24, 26-35 (Janvier 1993).
- [3] Interaktivní internetová stránka o studiu fylotaxe: <http://www.math.smith.edu/~phylo/> (anglicky).